Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Geometria 2

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. A. Verra

Tutori: Dott.ssa Paola Stolfi e Annamaria Iezzi

Soluzioni tutorato numero 1 (6 Ottobre 2009)

Forme bilineari

1. (a) $F((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = 2x_1y_1 - x_1y_2 + 3x_2y_1 - 5x_2y_2$ é una forma bilineare.
Verifichiamo le tre proprietá delle forme bilineari.

$\forall \overrightarrow{x} = (x_1,x_2), \overrightarrow{y} = (y_1,y_2), \overrightarrow{z} = (z_1,z_2) \in \mathbb{R}^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha:

- $F(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{z},\overrightarrow{y}) = F((x_1,x_2)+(z_1,z_2),(y_1,y_2)) = F((x_1+z_1,x_2+z_2),(y_1,y_2)) = 2(x_1+z_1)y_1 - (x_1+z_1)y_2 + 3(x_2+z_2)y_1 - 5(x_2+z_2)y_2 = 2x_1y_1 + 2z_1y_1 - x_1y_2 - z_1y_2 + 3x_2y_1 + 3z_2y_1 - 5x_2y_2 - 5z_2y_2 = 2x_1y_1 - x_1y_2 + 3x_2y_1 - 5x_2y_2 + 2z_1y_1 - z_1y_2 + 3z_2y_1 - 5z_2y_2 = F(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}) + F(\overrightarrow{z},\overrightarrow{y}) \Rightarrow F(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{z},\overrightarrow{y}) = F(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}) + F(\overrightarrow{z},\overrightarrow{y})$

- $F(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}+\overrightarrow{z}) = F((x_1,x_2),(y_1,y_2)+(z_1,z_2)) = F((x_1,x_2),(y_1+z_1,y_2+z_2)) = 2x_1(y_1+z_1) - x_1(y_2+z_2) + 3x_2(y_1+z_1) - 5x_2(y_2+z_2) = 2x_1y_1+2x_1z_1-x_1y_2-x_1z_2+3x_2y_1+3x_2z_1-5x_2y_2-5x_2z_2 = 2x_1y_1 - x_1y_2 + 3x_2y_1 - 5x_2y_2 + 2x_1z_1 - x_1z_2 + 3x_2z_1 - 5x_2z_2 = F(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}) + F(\overrightarrow{x},\overrightarrow{z}) \Rightarrow F(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}+\overrightarrow{z}) = F(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}) + F(\overrightarrow{x},\overrightarrow{z})$

- $F(\lambda\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}) = F(\lambda(x_1,x_2),(y_1,y_2)) = F((\lambda x_1,\lambda x_2),(y_1,y_2)) = 2\lambda x_1y_1 - \lambda x_1y_2 + 3\lambda x_2y_1 - 5\lambda x_2y_2 = \lambda(2x_1y_1 - x_1y_2 + 3x_2y_1 - 5x_2y_2) = \lambda F(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})$
$F(\overrightarrow{x},\lambda\overrightarrow{y}) = F((x_1,x_2),\lambda(y_1,y_2)) = F((x_1,x_2),(\lambda y_1,\lambda y_2)) = 2x_1\lambda y_1 - x_1\lambda y_2 + 3x_2\lambda y_1 - 5x_2\lambda y_2 = \lambda(2x_1y_1 - x_1y_2 + 3x_2y_1 - 5x_2y_2) = \lambda F(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})$
$\Rightarrow F(\lambda\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}) = \lambda F(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}) = F(\overrightarrow{x},\lambda\overrightarrow{y})$

(b) $G((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_1 - x_1^3y_2$ non é una forma bilineare. Infatti prendendo ad esempio $\overrightarrow{x} = (1,0)$, $\overrightarrow{y} = (0,1)$ e $\lambda = 2$ si ha:
$G(\lambda\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}) = G(2(1,0),(0,1)) = G((2,0),(0,1)) = -8$
mentre:
$\lambda G(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}) = 2\cdot G((1,0),(0,1)) = 2\cdot(-1) = -2$
$\Rightarrow G(\lambda\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}) \neq \lambda G(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})$ contraddicendo la terza proprietá delle forme bilineari.

2. (a) $F(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}) = \Big(\sum_{i=1}^{n}(x_i)\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n}(y_j)\Big)$ é una forma bilineare.
Verifichiamo le tre proprietá delle forme bilineari.

$\forall\, \overrightarrow{x} = (x_1,...,x_n), \overrightarrow{y} = (y_1,...,y_n), \overrightarrow{z} = (z_1,...,z_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha:

- $F(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{z},\overrightarrow{y}) = \Big(\sum_{i=1}^n (x_i+z_i)\Big)\Big(\sum_{j=1}^n (y_j)\Big) = \Big(\sum_{i=1}^n (x_i) + \sum_{i=1}^n (z_i)\Big)\Big(\sum_{j=1}^n (y_j)\Big) = \Big(\sum_{i=1}^n (x_i)\Big)\Big(\sum_{j=1}^n (y_j)\Big) + \Big(\sum_{i=1}^n (z_i)\Big)\Big(\sum_{j=1}^n (y_j)\Big) = F(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}) + F(\overrightarrow{z},\overrightarrow{y})$

- $F(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}+\overrightarrow{z}) = \Big(\sum_{i=1}^n (x_i)\Big)\Big(\sum_{j=1}^n (y_j+z_i)\Big) = \Big(\sum_{i=1}^n (x_i)\Big)\Big(\sum_{j=1}^n (y_j) + \sum_{j=1}^n (z_j)\Big) = \Big(\sum_{i=1}^n (x_i)\Big)\Big(\sum_{j=1}^n (y_j)\Big) + \Big(\sum_{i=1}^n (x_i)\Big)\Big(\sum_{j=1}^n (z_j)\Big) = F(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}) + F(\overrightarrow{x},\overrightarrow{z})$

- $F(\lambda\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}) = \Big(\sum_{i=1}^n (\lambda x_i)\Big)\Big(\sum_{j=1}^n (y_j)\Big) = \Big(\lambda\sum_{i=1}^n (x_i)\Big)\Big(\sum_{j=1}^n (y_j)\Big) = \lambda\Big(\sum_{i=1}^n (x_i)\Big)\Big(\sum_{j=1}^n (y_j)\Big) = \lambda F(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})$

(b) $F(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}) = \sum_{j=1}^n (x_j+y_j)^2 - \sum_{j=1}^n (x_j)^2 - \sum_{j=1}^n (y_j)^2$ é una forma bilineare.

Notiamo che:

$$\sum_{j=1}^n (x_j+y_j)^2 - \sum_{j=1}^n (x_j)^2 - \sum_{j=1}^n (y_j)^2 = \sum_{j=1}^n (2x_jy_j)$$

Verifichiamo le tre proprietá delle forme bilineari.

$\forall\overrightarrow{x} = (x_1,...,x_n), \overrightarrow{y} = (y_1,...,y_n), \overrightarrow{z} = (z_1,...,z_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha:

- $F(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{z},\overrightarrow{y}) = \sum_{j=1}^n 2(x_j+z_j)y_j = \sum_{j=1}^n 2x_jy_j + \sum_{j=1}^n 2z_jy_j = F(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}) + F(\overrightarrow{z},\overrightarrow{y})$

- $F(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}+\overrightarrow{z}) = \sum_{j=1}^n 2x_j(y_j+z_j) = \sum_{j=1}^n 2x_jy_j + \sum_{j=1}^n 2x_jz_j = F(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}) + F(\overrightarrow{x},\overrightarrow{z})$

- $F(\lambda\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}) = \sum_{j=1}^n 2\lambda x_jy_j = \lambda\sum_{j=1}^n 2x_jy_j = \lambda F(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})$

(c) $F(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}) = \big|\sum_{j=1}^n (x_jy_j)\big|$ non é una forma bilineare;

Mostriamo che la terza proprietá delle forme bilineari non é verificata.
Infatti prendendo $\overrightarrow{x}$ e $\overrightarrow{y}$ tali che $\sum_{j=1}^n (x_jy_j) \neq 0$ (ad esempio $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y} = \overrightarrow{e_1}$) e $\lambda = -1$ si ha:

$$\left.\begin{array}{l} F(-\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}) = \big|\sum_{j=1}^n -(x_jy_j)\big| = \big|\sum_{j=1}^n (x_jy_j)\big| > 0 \\ -F(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}) = -\big|\sum_{j=1}^n (x_jy_j)\big| < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow F(-\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}) \neq -F(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})$$

3. (a) $F(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}) = 2x_1y_1 + x_1y_3 + 2x_2y_3 + x_3y_1 + 2x_3y_2 - 4x_3y_3$
$F(\overrightarrow{y},\overrightarrow{x}) = 2y_1x_1 + y_1x_3 + 2y_2x_3 + y_3x_1 + 2y_3x_2 - 4y_3x_3$

Poiché $\mathbb{R}$ é un campo, sfruttando la proprietá commutativa del prodotto e della somma, possiamo ricondurre la seconda espressione alla prima $\Rightarrow F(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = F(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{x}) \Rightarrow F$ é simmetrica.

(b) Sia $\mathbb{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$, la matrice $A = (a_{ij})$ che rappresenta F nella base $\mathbb{E}$ é tale che $a_{ij} = F(e_i, e_j)$.

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} = F(e_1, e_1) = 2 \\ a_{12} = F(e_1, e_2) = F(e_2, e_1) = 0 \\ a_{13} = F(e_1, e_3) = F(e_3, e_1) = 1 \\ a_{22} = F(e_2, e_2) = 0 \\ a_{23} = F(e_2, e_3) = F(e_2, e_3) = 2 \\ a_{33} = F(e_3, e_3) = -4 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

(c) Dobbiamo verificare che $F(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}) = 0$. Sfruttando le proprietá delle forme bilineari si ha:
$F(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}) = F(e_1 + e_3, e_1 + e_3) = F(e_1, e_1 + e_3) + F(e_3, e_1 + e_3) = F(e_1, e_1) + F(e_1, e_3) + F(e_3, e_1) + F(e_3, e_3) = F(e_1, e_1) + 2F(e_1, e_3) + F(e_3, e_3) = 2 + 2 - 4 = 0$.

(d) Dobbiamo verificare che $F(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = 0$.

$$F(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = {}^t\overrightarrow{v} A \overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ \sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ \sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix} = -10 + 10 = 0$$

(e) Poniamo $\overrightarrow{w_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\overrightarrow{w_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ricordiamo che dato un insieme $S \subseteq V$, si ha: $\langle S \rangle^{\perp} = S^{\perp}$.
Nel nostro caso $S = \{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}\} \Rightarrow \langle \overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2} \rangle^{\perp} = \{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}\}^{\perp}$, dove
$\{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}\} = \{\overrightarrow{v} \in V : F(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w_1}) = 0 \quad \text{e} \quad F(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w_2}) = 0\} = \overrightarrow{w_1}^{\perp} \cap \overrightarrow{w_2}^{\perp}$

- $\overrightarrow{w_1}^{\perp} = \{\overrightarrow{v} = (x, y, z) \in V : F(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{v}) = 0\}$

  $$F(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{v}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$
  $= 4x + 4y - 5z = 0 \Rightarrow \overrightarrow{w_1}^{\perp} = \{\overrightarrow{v} = (x, y, z) \in V : 4x + 4y - 5z = 0\}$

- $\overrightarrow{w_2}^{\perp} = \{\overrightarrow{v} = (x, y, z) \in V : F(\overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{v}) = 0\}$

  $$F(\overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{v}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= 3x + 2y - 3z = 0 \Rightarrow \overrightarrow{w_2}^{\perp} = \{\overrightarrow{v} = (x, y, z) \in V : 3x + 2y - 3z = 0\}$$

Pertanto $\{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}\}^{\perp}$ é l'insieme dei vettori $\overrightarrow{v} = (x, y, z)$ che verificano il seguente sistema:

$$\begin{cases} 4x + 4y - 5z = 0 \\ 3x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

equivalente a:

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 0 \\ 3x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

ottenuto dal precedente sostituendo alla prima equazione la differenza tra la prima e la seconda.

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 0 \\ 3x + 2y - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2z - 2y \\ 3x + 2y - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2z - 2y \\ 6z - 6y + 2y - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2z - 2y \\ y = \frac{3}{4}z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2z - \frac{3}{2}z = \frac{1}{2}z \\ y = \frac{3}{4}z \end{cases}$$

Quindi, in definitiva si ha:

$$\{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}\}^{\perp} = \left\{(\tfrac{1}{2}t, \tfrac{3}{4}t, t), t \in \mathbb{R}\right\} = \langle(2, 3, 4)\rangle$$

4. (a) $G(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = {}^t\overrightarrow{x} A \overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_3 & -2x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = x_1y_2 + x_3y_3 - 2x_2y_4$$

Risulta infatti $G(\overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{e_j}) = a_{ij}$, dove a_{ij} é l'elemento della matrice A situato nella i-esima riga e j-esima colonna.

(b) G é degenere poiché non ha rango massimo (ricordiamo che per rango di una forma bilineare si intende il rango della matrice che rappresenta la forma bilineare in una base qualsiasi, poiché quest'ultimo non dipende dalla particolare base scelta). Infatti la matrice A, avendo una riga tutta nulla, ha determinante uguale a 0.
Per trovare un vettore $\overrightarrow{x_0}$ del tipo richiesto osserviamo che:
$G(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y}) = 0 \,\forall\, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^4 \Leftrightarrow {}^t\overrightarrow{x_0} A \overrightarrow{y} = 0 \,\forall\, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^4 \Leftrightarrow {}^t\overrightarrow{x_0} A = 0 \Leftrightarrow {}^tA\overrightarrow{x_0} = 0$

$${}^tA\overrightarrow{x_0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \\ -2x_2 = 0 \end{cases}$$

Si tratta di un sistema lineare omogeneo avente ∞^1 soluzioni (in quanto $rg({}^tA)$=3), tra le quali ad esempio il vettore $\overrightarrow{e_4}$. Posto $\overrightarrow{x_0} = \overrightarrow{e_4}$

si ha quindi $G(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y}) = 0 \; \forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^4$.

Per trovare un vettore $\overrightarrow{y_0}$ del tipo richiesto ragioniamo in modo analogo:
$G(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y_0}) = 0 \, \forall \, \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^4 \Leftrightarrow {}^t\overrightarrow{x} A \overrightarrow{y_0} = 0 \, \forall \, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^4 \Leftrightarrow A\overrightarrow{y_0} = 0 \Leftrightarrow$

$$A\overrightarrow{y_0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_2 = 0 \\ -2y_4 = 0 \\ y_3 = 0 \end{cases}$$

Si tratta di un sistema lineare omogeneo avente ∞^1 soluzioni (in quanto $rg(A)$=3), tra le quali ad esempio il vettore $\overrightarrow{e_1}$. Posto $\overrightarrow{y_0} = \overrightarrow{e_1}$ si ha quindi $G(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y_0}) = 0 \; \forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^4$.

(c) Sia B la matrice che rappresenta la forma bilineare G rispetto alla base $b = \{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}, \overrightarrow{b_4}\}$. Si ha:
$B = {}^tPAP$,
dove $P = M_{e,b}$ é la matrice del cambiamento di coordinate dalla base b alla base e.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{b_1} = \overrightarrow{e_1} = (1,0,0,0) \\ \overrightarrow{b_2} = -\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_4} = (-1,0,0,1) \\ \overrightarrow{b_3} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} = (1,1,0,0) \\ \overrightarrow{b_4} = \overrightarrow{e_3} = (0,0,1,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{B} = {}^tPAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. (a) Dobbiamo verificare che $F(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_0}) \neq 0$.

$$F(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_0}) = {}^t\overrightarrow{x_0} A \overrightarrow{x_0} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 25$$

(b) Siano $\overrightarrow{y'} = (y'_1, y'_2, y'_3)$ e $\overrightarrow{y''} = (y''_1, y''_2, y''_3) \in \mathbb{R}^4$.

- $\overrightarrow{y'} + \overrightarrow{y''} = \overrightarrow{e_2} \Rightarrow (y'_1 + y''_1, y'_2 + y''_2, y'_3 + y''_3) = (0,1,0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1' + y_1'' = 0 \\ y_2' + y_2'' = 1 \\ y_3' + y_3'' = 0 \end{cases}$$

- $\overrightarrow{y'} \parallel \overrightarrow{x_0} \Rightarrow \overrightarrow{y'} = \lambda \overrightarrow{x_0} = (-\lambda, 3\lambda, 2\lambda) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1' = -\lambda \\ y_2' = 3\lambda \\ y_3' = 2\lambda \end{cases}$$

- $\overrightarrow{y''} \perp \overrightarrow{x_0} \Rightarrow F(\overrightarrow{y''}, \overrightarrow{x_0}) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow F(\overrightarrow{y''}, \overrightarrow{x_0}) = \begin{pmatrix} y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2y_2'' - y_3'' & 2y_1'' + y_2'' + 2y_3'' & -y_1'' + 2y_2'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$4y_1'' + 5y_2'' + 7y_3'' = 0$$

Quindi intersecando le condizioni trovate si ottiene il seguente sistema di 7 equazioni in 7 incognite:

$$\begin{cases} y_1' + y_1'' = 0 \\ y_2' + y_2'' = 1 \\ y_3' + y_3'' = 0 \\ y_1' = -\lambda \\ y_2' = 3\lambda \\ y_3' = 2\lambda \\ 4y_1'' + 5y_2'' + 7y_3'' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\lambda + y_1'' = 0 \\ 3\lambda + y_2'' = 1 \\ 2\lambda + y_3'' = 0 \\ y_1' = -\lambda \\ y_2' = 3\lambda \\ y_3' = 2\lambda \\ 4y_1'' + 5y_2'' + 7y_3'' = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1'' = \lambda \\ y_2'' = 1 - 3\lambda \\ y_3'' = -2\lambda \\ y_1' = -\lambda \\ y_2' = 3\lambda \\ y_3' = 2\lambda \\ 4\lambda + 5(1 - 3\lambda) - 14\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1'' = \frac{1}{5} \\ y_2'' = \frac{2}{5} \\ y_3'' = -\frac{2}{5} \\ y_1' = -\frac{1}{5} \\ y_2' = \frac{3}{5} \\ y_3' = \frac{2}{5} \\ \lambda = \frac{1}{5} \end{cases}$$

In definitiva si ottiene : $\overrightarrow{y'} = (-\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5})$ e $\overrightarrow{y''} = (\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{2}{5})$

(c) $\overrightarrow{e_2}^{\perp} = \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^3 : F(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{y}) = 0$

$$F(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} =$$

$$2y_1 + y_2 + 2y_3 = 0$$

Quindi un'equazione cartesiana di $\overrightarrow{e_2}^{\perp}$ é $2y_1 + y_2 + 2y_3 = 0$

6. (a) Verifichiamo che D é lineare in entrambi gli argomenti.

Presi $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{x}' = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in K^2$ e $a, b \in K$ si ha:

$$D(a\mathbf{x} + b\mathbf{x}', \mathbf{y}) = \begin{vmatrix} ax_1 + bx_1' & ax_2 + bx_2' \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} x_1' & x_2' \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = aD(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + bD(\mathbf{x}', \mathbf{y}).$$

dove nel penultimo passaggio é stata sfruttata una delle proprietá dei determinanti.
Analogamente si verifica che $D(\mathbf{x}, a\mathbf{y} + b\mathbf{y}') = aD(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + bD(\mathbf{x}, \mathbf{y}')$.
Infine, sempre per le proprietá dei determinanti si ha:

$$D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = -D(\mathbf{y}, \mathbf{x})$$

Pertanto D é antisimmetrica.

(b) Risulta:

$$D(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_1}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad D(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$D(\mathbf{e_2}, \mathbf{e_1}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \quad , \quad D(\mathbf{e_2}, \mathbf{e_2}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Pertanto in base $\mathbb{E}$, D ha matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (antisimmetrica)

(c) $\forall\, \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in K^2$, si ha:

$$D(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_1x_2 - x_2x_1 = 0$$

7. (a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Notiamo che sulla diagonale compaiono solo zeri il che vuol dire che i vettori della base canonica sono tutti isotropi.
Scegliamo allora il vettore $\overrightarrow{f_1} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$ che sicuramente non é isotropo.
Andiamo adesso a calcolare $\overrightarrow{f_1}^{\perp}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} =$$

$= 2y_1 + 2y_2 = 0$

Risolvendo questa equazione otteniamo che $\overrightarrow{f_1}^{\perp} = \langle (1,-1,0),(0,0,1)\rangle$.
Scegliamo allora il vettore $\overrightarrow{f_2} = (1,-1,0)$ che non é isotropo; infatti:

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} =$
-4

Andiamo adesso a calcolare $\overrightarrow{f_2}^{\perp}$:

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} =$

$= -2y_1 + 2y_2 + 2y_3 = 0$

Mettendo a sistema le equazioni che determinano $\overrightarrow{f_1}^{\perp}$ e $\overrightarrow{f_2}^{\perp}$, consideriamo il vettore $\overrightarrow{f_3} = (1,-1,2)$ che soddisfa tale sistema e che non isotropo in quanto:
$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} =$
4

$f = (\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3})$ é una base diagonalizzante; infatti sia:

$P = M_{e,f} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

la matrice del cambiamento di coordinate dalla base f alla base e, si ha che:

$D =^t PAP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ é una matrice diagonale.

(b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Osserviamo che $rg(B) = 2 < 3$, per cui la matrice diagonale D congruente a B soddisferá anch'essa la condizione $rg(D) = 2$.
Scegliamo il vettore $\overrightarrow{f_1} = (1,0,0)$ che non é isotropo come possiamo

vedere dalla matrice B.
Calcoliamo $\overrightarrow{f_1}^{\perp}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} =$$
$$= y_1 + 3y_2 - 2y_3 = 0$$

Risolvendo questa equazione otteniamo che $\overrightarrow{f_1}^{\perp} = \langle (2,0,1), (0,2,3) \rangle$.
Scegliamo allora il vettore $\overrightarrow{f_2} = (2,0,1)$ che non é isotropo in quanto:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$
$$-6$$

Andiamo adesso a calcolare $\overrightarrow{f_2}^{\perp}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} =$$
$$= 6y_2 - 6y_3 = 0$$

Mettendo a sistema le equazioni che determinano $\overrightarrow{f_1}^{\perp}$ e $\overrightarrow{f_2}^{\perp}$ scegliamo come vettore $\overrightarrow{f_3} = (-1,1,1)$ che soddisfa tale sistema e che dovrá essere necessariamente isotropo per l'osservazione iniziale; infatti:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$
$$0$$

$f = (\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3})$ é una base diagonalizzante; infatti sia:

$$P = M_{e,f} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice del cambiamento di coordinate dalla base f alla base e, si ha che:

$$D =^t PBP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ é una matrice diagonale.