Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Geometria 2

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. A. Verra
Tutrici: Dott.ssa Paola Stolfi e Annamaria Iezzi

SOLUZIONI TUTORATO NUMERO 2 (21 OTTOBRE 2009)
FORME QUADRATICHE E PRODOTTI SCALARI

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

1. (a) $Q(x, y, z) = xz + xy + yz$

Scriviamo la matrice che rappresenta Q:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Adesso scegliamo un vettore non isotropo; poiché $\overrightarrow{e_1}$ e $\overrightarrow{e_2}$ sono vettori isotropi allora sicuramente la loro somma é un vettore non isotropo, quindi poniamo $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$ e calcoliamo $\overrightarrow{v_1}^{\perp}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + z = 0$$

Allora poniamo $\overrightarrow{v_2} = (1, -1, 0)$ e controlliano che non é isotropo:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1$$

Ora calcoliamo $\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle^{\perp}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 0$$

Quindi $\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle^{\perp}$ é l'insieme dei vettori che risolvono il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + z = 0 \\ -\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 0 \end{cases}$$

Poniamo allora $\overrightarrow{v_3} = (1, 1, -1)$ e controlliamo che non é isotropo:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$
-1

Allora la matrice che rappresenta Q in forma diagonale é $\mathbf{D} =^t \mathbf{PAP}$ dove $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ é la matrice del cambiamento di coordinate. Dunque $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ e in queste nuove coordinate la forma quadratica ha la seguente forma:

$$Q(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2$$

Osservando la matrice $\mathbf{D}$ vediamo che la segnatura di Q é $(p, q) = (1, 2)$.

(b) $Q(x, y, z) = -x^2 - 4xy + 3y^2 + 2z^2$

Scriviamo la matrice che rappresenta Q:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Poniamo $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{e_1}$ perché, come possiamo vedere dalla matrice $\mathbf{A}$, tale vettore non é isotropo. Calcoliamo $\overrightarrow{v_1}^{\perp}$:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$
$-x - 2y = 0$

Allora poniamo $\overrightarrow{v_2} = (-2, 1, 0)$ e controlliano che non é isotropo:

$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$
7

Ora calcoliamo $\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle^{\perp}$:

$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$
$7y = 0$

Quindi $\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle^\perp$ é l'insieme dei vettori che risolvono il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} -x-2y=0 \\ 7y=0 \end{cases}$$

Poniamo allora $\overrightarrow{v_3} = (0,0,1)$ che, come possiamo vedere dalla matrica $\mathbf{A}$ non é isotropo.
Allora la matrice che rappresenta Q in forma diagonale é $\mathbf{D} =^t \mathbf{PAP}$ dove $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ é la matrice del cambiamento di coordianate. Dunque $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e in queste nuove coordinate la forma quadratica ha la seguente forma:

$$Q(x,y,z) = x^2 + 7y^2 + 2z^2$$

.
Osservando la matrice $\mathbf{D}$ vediamo che la segnatura di Q é $(p,q) = (3,0)$.

(c) $Q(x,y,z) = 2xy + y^2 - 2xz$

Scriviamo la matrice che rappresenta Q:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Poniamo $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{e_2}$. Calcoliamo $\overrightarrow{v_1}^\perp$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x + y = 0$$

Allora poniamo $\overrightarrow{v_2} = (1,-1,0)$ e controlliano che non é isotropo:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1$$

Ora calcoliamo $\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle^\perp$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -x - z = 0$$

Quindi $\langle\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}\rangle^\perp$ é l'insieme dei vettori che risolvono il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x+y=0 \\ -x-z=0 \end{cases}$$

Poniamo allora $\overrightarrow{v_3}=(1,-1,-1)$ e controlliamo che non é isotropo:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} =$$
1

Allora la matrice che rappresenta Q in forma diagonale é $\mathbf{D}={}^t\,\mathbf{PAP}$ dove $\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ é la matrice del cambiamento di coordianate. Dunque $\mathbf{D}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e in queste nuove coordinate la forma quadratica ha la seguente forma:

$$Q(x,y,z)=x^2-y^2+z^2$$

.
Osservando la matrice $\mathbf{D}$ vediamo che la segnatura di Q é $(p,q)=(2,1)$.

2. (a) Come prima, scriviamo la matrice che rappresenta la forma quadratica Q:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Poniamo $\overrightarrow{v_1}=\overrightarrow{e_2}$. Calcoliamo $\overrightarrow{v_1}^\perp$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} =$$
$y-2z=0$

Allora poniamo $\overrightarrow{v_2}=(0,2,1,0)$ e controlliano che non é isotropo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

-4

Ora calcoliamo $\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle^{\perp}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} =$$

$-4z = 0$

Quindi $\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle^{\perp}$ é l'insieme dei vettori che risolvono il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} y - 2z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Poniamo allora $\overrightarrow{v_3} = (0, 0, 0, 1)$ che, come possiamo vedere dalla matrice $\mathbf{A}$, non é isotropo.
Ora calcoliamo $\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3} \rangle^{\perp}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} =$$

$x - w = 0$

Quindi $\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3} \rangle^{\perp}$ é l'insieme dei vettori che risolvono il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} y - 2z = 0 \\ z = 0 \\ x - w = 0 \end{cases}$$

Allora poniamo $\overrightarrow{v_4} = (1, 0, 0, 1)$ e controlliano che non é isotropo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

1

Allora la matrice che rappresenta Q in forma diagonale é $\mathbf{D} =^t \mathbf{PAP}$ dove $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ é la matrice del cambiamento di coordianate. Dunque $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e in queste nuove coordinate la forma quadratica ha la seguente forma:

$$Q(x,y,z,w) = x^2 - 4y^2 - z^2 + w^2$$

.

Osservando la matrice $\mathbf{D}$ vediamo che la segnatura di Q é $(p,q) = (2,2)$ e quindi il rango é 4.

(b) L'espressione canonica di Q é la seguente: $Q(x,y,z,w) = x^2 + y^2 - z^2 - w^2$ e possiamo scegliere la seguente base rispetto a cui Q si scrive in tale forma: $\{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{w_3}, \overrightarrow{w_4}\}$ dove si é posto:
$\overrightarrow{w_1} = \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{w_2} = \overrightarrow{v_4}, \overrightarrow{w_3} = \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{w_4} = \frac{\overrightarrow{v_2}}{\sqrt{|Q(\overrightarrow{v_2}|)}}$.

3. (a) La matrice di b rispetto alla base canonica $\mathbb{E}$ é:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Usiamo 2 metodi per dimostrare che b é un prodotto scalare.

- **Metodo 1**
  Usiamo la definizione di prodotto scalare.
  Si vede chiaramente che b é una forma bilineare. Resta da verificare che b é definita positiva, cioé $b(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) \geq 0 \forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3$ e $b(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{x} = 0$

  $b(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_2x_3 + 3x_3^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 + 2x_3^2 = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 + 2x_3^2 \geq 0$

  $$b(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$$

- **Metodo 2**
  Una forma bilineare simmetrica é definita positiva se e solo se la sua corrispondente matrice simmetrica é definita positiva.
  Per stabilire se una matrice é definita positiva utilizziamo il seguente teorema:

  Teorema: Una matrice simmetrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ é definita positiva se e solo se tutti i suoi minori principali $D_1 = a_{11}$, $D_2 = det(A(12|12)), \cdots, D_i = det(A(12 \cdots i|12 \cdots i), \cdots, D_n = det(A)$ sono positivi.

  Nel nostro caso abbiamo:

  $D_1 = 1 > 0$

  $$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 > 0$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 1 - 3 = 2 > 0$$

Per il teorema sopracitato, b é un prodotto scalare.

(b) Anche in questo caso, per trovare una base ortogonale (= diagonalizzante) per b, si potrebbe procedere attraverso due metodi diversi. Il primo consiste nella solita diagonalizzazione attraverso il procedimento induttivo utilizzato per le forme bilineari.
Vediamo invece come é possibile trovare una base ortogonale attraverso il metodo di Gram-Schmidt.
A partire dunque dalla base canonica $\mathbb{E} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$, per il teorema di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt, troviamo $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ tali che $\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3} \rangle = \langle \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3} \rangle = \mathbb{R}^3$ e $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$ sono a due a due ortogonali, cioé $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ costituisce una base ortogonale per b.
In particolare, ponendo $\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle := b(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ si ha:

$$v_{k+1} = e_{k+1} - \sum_{m=1, v_m \neq 0}^{3} \frac{\langle v_m, e_{k+1} \rangle}{\langle v_m, v_m \rangle} v_m, \qquad k = 0, 1, 2$$

Quindi:

$$v_1 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = e_2 - \frac{\langle v_1, e_2 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-1}{1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = e_3 - \frac{\langle v_1, e_3 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \frac{\langle v_2, e_3 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{0}{1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A partire dalla base ortogonale $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ si puó trovare una base ortonormale normalizzando ciascuno dei vettori $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$. Quindi ricordando che $\|\overrightarrow{x}\| = \sqrt{b(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x})}$, si ha che una base ortonormale per b é data da:

$$\left\{ \frac{\overrightarrow{v_1}}{\|\overrightarrow{v_1}\|}, \frac{\overrightarrow{v_2}}{\|\overrightarrow{v_2}\|}, \frac{\overrightarrow{v_3}}{\|\overrightarrow{v_3}\|} \right\} = \left\{ \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \overrightarrow{v_3} \right\} = \left\{ (1,0,0), (1,1,0), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\}$$

4. Ricordiamo che $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} \Rightarrow \|v\|^2 = \langle v, v \rangle$.

(a) $\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = \langle v+w, v+w \rangle + \langle v-w, v-w \rangle = \langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle + 2\langle v, w \rangle + \langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle - 2\langle v, w \rangle = 2\langle v, v \rangle + 2\langle w, w \rangle = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$

(b) $\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2 = \langle v+w, v+w \rangle - \langle v-w, v-w \rangle = \langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle + 2\langle v, w \rangle - (\langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle - 2\langle v, w \rangle) = 2\langle v, w \rangle + 2\langle v, w \rangle = 4\langle v, w \rangle$

5. (a) Scriviamo la matrice che rappresenta questa forma bilineare $\langle , \rangle$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sappiamo che un prodotto scalare é una forma bilineare simmetrica definita positiva, guardando la matrice vadiamo che la forma bilineare assegnata é simmetrica; per vedere se é definita positiva procediamo con il metodo dei minori principali:
Una matrice simmetrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ é definita positiva se e solo se tutti i suoi minori principali $D_1, D_2, ..., D_n$ sono positivi, dove $D_i = det(A(1, ..., i|1, ..., i))$
Quindi nel nostro caso: $D_1 = 1 > 0$; $D_2 = 2 > 0$; $D_3 = 1 > 0$; $D_4 = 1 > 0$. Quindi $\langle , \rangle$ é un prodotto scalare.

(b) Poniamo $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{e_1}$
$\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{e_2} - \dfrac{\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{e_2} \rangle}{\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1} \rangle} \overrightarrow{v_1} = (0,1,0,0) + 2(1,0,0,0) = (2,1,0,0)$
$\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{e_3} - \dfrac{\langle \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{e_3} \rangle}{\langle \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2} \rangle} \overrightarrow{v_2} - \dfrac{\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{e_3} \rangle}{\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1} \rangle} \overrightarrow{v_1} = (0,0,1,0) + \dfrac{1}{2}(2,1,0,0) = (1, \dfrac{1}{2}, 1, 0)$
$\overrightarrow{v_4} = \overrightarrow{e_4} - \dfrac{\langle \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{e_4} \rangle}{\langle \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_3} \rangle} \overrightarrow{v_3} - \dfrac{\langle \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{e_4} \rangle}{\langle \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2} \rangle} \overrightarrow{v_2} - \dfrac{\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{e_4} \rangle}{\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1} \rangle} \overrightarrow{v_1} = (0,0,0,1)$
Quindi ortogonalizzando la base canonica di $\mathbb{R}^4$ si ottiene la seguente base:
$\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4}\} = \{(1,0,0,0), (2,1,0,0), (1, \frac{1}{2}, 1, 0), (0,0,0,1)\}$.

6. (a) $\left\{\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}, \overrightarrow{f_4}\right\} = \{(2,0,0,1), (1,2,2,3), (10, -1, \frac{-1}{2}, 0), (5,2,2,5)\}$
Troviamo una base ortonormale rispetto al prodotto scalare standard $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$. Notiamo che $f_4 = 2f_1 + f_2$ quindi la dimensione dello spazio vettoriale generato da questi vettori é tre e quindi dobbiamo trovare solo tre vettori di norma 1 e ortogonali tra di loro. Poniamo:
$\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{f_1} = (2,0,0,1)$
$\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{f_2} - \dfrac{\left\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{f_2} \right\rangle}{\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1} \rangle} \overrightarrow{v_1} = (1,2,3,0) - 1(2,0,0,1) = (-1,2,2,2)$
$\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{f_3} - \dfrac{\left\langle \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{f_3} \right\rangle}{\langle \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2} \rangle} \overrightarrow{v_2} - \dfrac{\left\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{f_3} \right\rangle}{\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1} \rangle} \overrightarrow{v_1} = (10, -1, -\dfrac{1}{2}, 0) + 1(-1,2,2,2) - 4(2,0,0,1) = (1, 1, \dfrac{3}{2}, -2)$
Ora poniamo:
$\overrightarrow{w_1} = \dfrac{\overrightarrow{v_1}}{\sqrt{\|\overrightarrow{v_1}\|}} = (\dfrac{2}{\sqrt{5}}, 0, 0, \dfrac{1}{\sqrt{5}})$
$\overrightarrow{w_2} = \dfrac{\overrightarrow{v_2}}{\sqrt{\|\overrightarrow{v_2}\|}} = (-\dfrac{1}{\sqrt{13}}, \dfrac{2}{\sqrt{13}}, \dfrac{2}{\sqrt{13}}, \dfrac{2}{\sqrt{13}})$
$\overrightarrow{w_3} = \dfrac{\overrightarrow{v_3}}{\sqrt{\|\overrightarrow{v_3}\|}} = \dfrac{2}{5}(1, 1, \dfrac{3}{2}, -2)$

Allora $\{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{w_3}\} = \left\{(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}), (-\frac{1}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}), (\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, -\frac{4}{5})\right\}$ é una base ortonormale del sottospazio generato dai vettori assegnati.

(b) $\left\{\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}\right\} = \{(-1, 0, 1, 1), (2, 1, 1, 4), (0, 1, 3, 6)\}$
Troviamo una base ortonormale rispetto al prodotto scalare standard $\langle(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\rangle = x_1y_+x_2y_2 + x_3y_3$.Notiamo che $f_3 = 2f_1 + f_2$ quindi la dimensione dello spazio vettoriale generato da questi vettori é due e quindi dobbiamo trovare solo due vettori di norma 1 e ortogonali tra di loro. Poniamo:
$\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{f_1} = (-1, 0, 1, 1)$
$\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{f_2} - \frac{\left\langle\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{f_2}\right\rangle}{\langle\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1}\rangle}\overrightarrow{v_1} = (2, 1, 1, 4) - 1(-1, 0, 1, 1) = (3, 1, 0, 3)$
Ora poniamo:
$\overrightarrow{w_1} = \frac{\overrightarrow{v_1}}{\sqrt{\|\overrightarrow{v_1}\|}} = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$
$\overrightarrow{w_2} = \frac{\overrightarrow{v_2}}{\sqrt{\|\overrightarrow{v_2}\|}} = (\frac{3}{\sqrt{19}}, \frac{1}{\sqrt{19}}, 0, \frac{3}{\sqrt{19}})$
Allora $\{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}\} = \left\{(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), (\frac{3}{\sqrt{19}}, \frac{1}{\sqrt{19}}, 0, \frac{3}{\sqrt{19}})\right\}$ é una base ortonormale del sottospazio generato dai vettori assegnati.

(c) $\left\{\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}, \overrightarrow{f_4}\right\} = \{(1, 1, -1, 1), (-2, -2, 2, -2), (2, 1, 1, 2), (3, 1, 1, 1)\}$
Troviamo una base ortonormale rispetto al prodotto scalare standard $\langle(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\rangle = x_1y_+x_2y_2+x_3y_3$. Notiamo che $f_2 = -2f_1$ quindi la dimensione dello spazio vettoriale generato da questi vettori é tre e quindi dobbiamo trovare solo tre vettori di norma 1 e ortogonali tra di loro. Poniamo:
$\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{f_1} = (1, 1, -1, 1)$
$\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{f_3} - \frac{\left\langle\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{f_3}\right\rangle}{\langle\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1}\rangle}\overrightarrow{v_1} = (2, 1, 1, 2) - 1(1, 1, -1, 1) = (1, 0, 2, 1)$
$\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{f_4} - \frac{\left\langle\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{f_4}\right\rangle}{\langle\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2}\rangle}\overrightarrow{v_2} - \frac{\left\langle\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{f_4}\right\rangle}{\langle\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1}\rangle}\overrightarrow{v_1} = (3, 1, 1, 1) - 1(1, 0, 2, 1) - 1(1, 1, -1, 1) = (1, 0, 0, -1)$
Ora poniamo:
$\overrightarrow{w_1} = \frac{\overrightarrow{v_1}}{\sqrt{\|\overrightarrow{v_1}\|}} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$
$\overrightarrow{w_2} = \frac{\overrightarrow{v_2}}{\sqrt{\|\overrightarrow{v_2}\|}} = (\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$
$\overrightarrow{w_3} = \frac{\overrightarrow{v_3}}{\sqrt{\|\overrightarrow{v_3}\|}} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$
Allora $\{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{w_3}\} = \left\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})\right\}$ é una base ortonormale del sottospazio generato dai vettori assegnati.

(d) $\left\{\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}, \overrightarrow{f_4}\right\} = \left\{(1, 1, 0, -1), (-2, 1, \sqrt{3}, 5), (4, 4, \sqrt{3}, 2), (-6, -3, 0, 3)\right\}$
Troviamo una base ortonormale rispetto al prodotto scalare standard $\langle(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\rangle = x_1y_+x_2y_2 + x_3y_3$. Notiamo che $f_2 = f_3+f_4$ quindi la dimensione dello spazio vettoriale generato da questi vettori é tre e quindi dobbiamo trovare solo tre vettori di norma 1 e

ortogonali tra di loro. Poniamo:
$\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{f_1} = (1,1,0,-1)$

$\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{f_4} - \dfrac{\left\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{f_4} \right\rangle}{\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1} \rangle}\overrightarrow{v_1} = (-6,-3,0,3) + 4(1,1,0,-1) = (-2,-2,0,2)$

$\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{f_3} - \dfrac{\left\langle \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{f_3} \right\rangle}{\langle \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2} \rangle}\overrightarrow{v_2} - \dfrac{\left\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{f_3} \right\rangle}{\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1} \rangle}\overrightarrow{v_1} = (4,4,\sqrt{3},2) + 1(-2,-2,0,2) - 2(1,1,0,-1) = (0,0,\sqrt{3},0)$

Ora poniamo:

$\overrightarrow{w_1} = \dfrac{\overrightarrow{v_1}}{\sqrt{\|\overrightarrow{v_1}\|}} = (\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, 0, -\dfrac{1}{\sqrt{3}})$

$\overrightarrow{w_2} = \dfrac{\overrightarrow{v_2}}{\sqrt{\|\overrightarrow{v_2}\|}} = (-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, 0, \dfrac{1}{\sqrt{3}})$

$\overrightarrow{w_3} = \dfrac{\overrightarrow{v_3}}{\sqrt{\|\overrightarrow{v_3}\|}} = (0,0,1,0)$

Allora $\{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{w_3}\} = \left\{ (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{3}}), (-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}), (0,0,1,0) \right\}$
é una base ortonormale del sottospazio generato dai vettori assegnati.

7. Il sistema che definisce V ha come soluzioni i vettori $(x, y, x+y)$, con $x, y \in \mathbb{R}$ arbitrari. Quindi, $dimV = 2$ e una base di V é $\{(1,0,1),(0,1,1)\}$, cioé $V = \langle (1,0,1),(0,1,1) \rangle$.

   Sia $\langle\, , \rangle$ il prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^3$:

   $\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$

   Utilizziamo il procedimento di Gram-Schmidt per trovare una base ortogonale del sottospazio V rispetto a $\langle\, , \rangle$.

   Poniamo $v_1 = (1,0,1)$ e $v_2 = (0,1,1)$. Allora:

   $w_1 = v_1 = (1,0,1)$;

   $w_2 = v_2 - \dfrac{\langle w_1, v_2 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 = (0,1,1) - \dfrac{1}{2}(1,0,1) = \left(-\dfrac{1}{2}, 1, \dfrac{1}{2} \right)$

   La base ortonormale cercata sará allora:

   $\left\{ \dfrac{w_1}{\|w_1\|}, \dfrac{w_2}{\|w_2\|} \right\} = \left\{ \dfrac{w_1}{\sqrt{2}}, \dfrac{w_2}{\sqrt{\frac{3}{2}}} \right\} = \left\{ \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dfrac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(-\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{2}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}} \right) \right\}.$

   Per completare la base trovata a base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ dobbiamo trovare un vettore w_3 tale che:

   1) $w_3 \in \{w_1, w_2\}^{\perp}$
   2) $\|w_3\| = 1$
   3) $\langle w_1, w_2, w_3 \rangle = \mathbb{R}^3$

   In realtá sará sufficiente trovare un vettore soddisfacente 1) e 2). La 3) sará automaticamente verificata poiché in tal caso w_1, w_2, w_3 costituiscono un insieme di vettori non nulli a due a due ortogonali e pertanto risultano lineramente indipendenti.

Sia $w_3 = (x, y, z)$

$w_3 \in \{w_1, w_2\}^\perp \Rightarrow w_3 \in w_1^\perp \cap w_2^\perp \Rightarrow$:
$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \langle w_3, w_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}z = 0 \\ \langle w_3, w_2\rangle = -\frac{1}{\sqrt{6}}x + \frac{2}{\sqrt{6}}y + \frac{1}{\sqrt{6}}z = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -z \\ y = -z \end{array} \right.$$

Il vettore $\overrightarrow{x} = (1, 1, -1)$ verifica il sistema precedente e pertanto é ortogonale contemporaneamente a w_1 e w_2.
Allora $w_3 = \frac{\overrightarrow{x}}{\|\overrightarrow{x}\|} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ verifica 1), 2) e 3) e pertanto $\{w_1, w_2, w_3\}$ é una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

8. Sia $\overrightarrow{v} = (x, y, z)$ un generico vettore.
Dapprima stabiliamo quali condizioni devono verificare le coordinate di $\overrightarrow{v}$ affinché quest'ultimo sia ortogonale a $\overrightarrow{u}$ e abbia norma 2:
1) $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{u}^\perp \Rightarrow -x + z = 0$
2) $\|\overrightarrow{v}\| = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 4$

   (a) Il piano vettoriale $\langle \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\rangle$ ha equazione cartesiana:

   $$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{cioé } x - y - z = 0.$$

   Poiché $\overrightarrow{v}$ é complanare a $\overrightarrow{u_1}$ e $\overrightarrow{u_2}$ si deve avere $\overrightarrow{v} \in \langle \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\rangle$, cioé $x - y - z = 0$. Mettendo a sistema questa equazione con quelle ricavate in 1) e 2), otteniamo:

   $$\left\{ \begin{array}{l} -x + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ x - y - z = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = z \\ 2x^2 + y^2 = 2 \\ x - y - x = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = z \\ 2x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \\ y = 0 \end{array} \right. \Rightarrow$$

   $$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{v_1} = (\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}) \\ \overrightarrow{v_2} = (-\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}) \end{array} \right.$$

   Pertanto troviamo 2 vettori che soddisfano le condizioni richieste.

   (b) Premettiamo innanzitutto che dati due vettori $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^3$ tali che ϑ sia l'angolo tra di essi compreso, il prodotto scalare standard $\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ é definito anche nel modo seguente: $\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\rangle = \|\overrightarrow{x}\| \, \|\overrightarrow{y}\| \, cos\vartheta$.
   Verifichiamo l'equivalenza delle due definizioni in $\mathbb{R}^2$:
   fissato un riferimento cartesiano Oxy, siano $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2), \overrightarrow{y} = (y_1, y_2)$ e siano ϑ_1, ϑ_2 gli angoli che i vettori $\overrightarrow{x}$ e $\overrightarrow{y}$ formano rispettivamente con la direzione positiva dell'asse delle x. Allora si avrá che $\vartheta = |\vartheta_1 - \vartheta_2|$, dove ϑ é l'angolo compreso tra $\overrightarrow{x}$ e $\overrightarrow{y}$. Inoltre siano $\rho_1 = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)} = \|\overrightarrow{x}\|$ e $\rho_2 = \sqrt{(y_1^2 + y_2^2)} = \|\overrightarrow{y}\|$ le lunghezze rispettivamente dei vettori $\overrightarrow{x}$ e $\overrightarrow{y}$.
   Allora dai teoremi sui triangoli rettangoli si ha che: $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2) =$

$(\rho_1 cos\vartheta_1, \rho_1 sen\vartheta_1)$ e $\overrightarrow{y} = (y_1, y_2) = (\rho_2 cos\vartheta_2, \rho_2 sen\vartheta_2)$.
Pertanto:
$\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 = \rho_1 cos\vartheta_1 \rho_2 cos\vartheta_2 + \rho_1 sen\vartheta_1 \rho_2 sen\vartheta_2 = \rho_1\rho_2(cos\vartheta_1 cos\vartheta_2 + sen\vartheta_1 sen\vartheta_2) = \rho_1\rho_2 cos|\vartheta_1 - \vartheta_2| = \| \overrightarrow{x} \| \, \| \overrightarrow{y} \| \, cos\vartheta$.

Torniamo all'esercizio.
Affinché $\overrightarrow{v} = (x, y, z)$ formi un angolo $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ con $\overrightarrow{u_3}$ si deve avere per quanto appena visto:
$\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u_3} \rangle = \| \overrightarrow{v} \| \, \| \overrightarrow{u_3} \| \, cos\vartheta \Rightarrow \frac{\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u_3} \rangle}{\| \overrightarrow{v} \| \| \overrightarrow{u_3} \|} = cos\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\langle (x,y,z),(-1,1,0) \rangle}{\| \overrightarrow{v} \| \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{-x+y}{\| \overrightarrow{v} \| \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Poiché dalle ipotesi $\| \overrightarrow{v} \| = 2$, allora $\frac{-x+y}{2} = 1$, cioé $y = x + 2$. Ricordando che $z = x$ e $2x^2 + y^2 = 4$, per quanto visto a inizio esercizio, ne segue che $\overrightarrow{v} = (x, x+2, x)$ con $2x^2 + (x+2)^2 = 4$, cioé $3x^2 + 4x = 0$. Pertanto $x = 0$ oppure $x = -\frac{4}{3}$. I vettori richiesti sono dunque ancora due:

$\overrightarrow{v_1} = (0, 2, 0)$ e $\overrightarrow{v_2} = \left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$

9. (a) Si osservi che in $\mathbb{Z}_3$ risulta: $-\overline{2} = \overline{1}$ e $\frac{\overline{1}}{\overline{2}} = \overline{2}$. Si ha quindi:

$$P = x^2 - \overline{2}y^2 + xy - xz = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{2} & \overline{1} \\ \overline{2} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix}$$

(matrice di Q in base $\mathbb{E}$).
Poiché $det(A) = -\overline{1} = \overline{2} \neq \overline{0}$, allora $rg(Q) = rg(A) = 3$.

(b) Procediamo con il solito metodo induttivo.
$\overrightarrow{e_1}$ é un vettore non isotropo poiché $Q(\overrightarrow{e_1}) = \overline{1}$. Pertanto $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{e_1}$ costituirá il primo vettore della base nostra diagonalizzante:

Allora $(\mathbb{Z}_3)^3 = \langle \overrightarrow{v_1} \rangle \oplus \overrightarrow{v_1}^{\perp}$, dove

$$\overrightarrow{v_1}^{\perp} = \left\{ (x,y,z) \in (\mathbb{Z}_3)^3 | \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{2} & \overline{1} \\ \overline{2} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in (\mathbb{Z}_3)^3 | \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{2} & \overline{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} = \left\{ (x,y,z) \in (\mathbb{Z}_3)^3 | x + \overline{2}y + z = 0 \right\}$$

$\overrightarrow{v_2} = (\overline{2}, \overline{0}, \overline{1}) \in \overrightarrow{v_1}^{\perp}$ e $Q(\overrightarrow{v_2}) = \overline{1} - \overline{2} = \overline{2}$. Essendo $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ entrambi non isotropi e ortogonali tra loro, essi risulteranno linearmente indipendenti. Pertanto $\overrightarrow{v_2}$ costituirá il secondo vettore della nostra base diagonalizzante e si avrá:
$(\mathbb{Z}_3)^3 = \langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle \oplus \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}^{\perp}$
A questo punto rimane da trovare $\overrightarrow{v_3} \in \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}^{\perp} = \overrightarrow{v_1}^{\perp} \cap \overrightarrow{v_2}^{\perp}$.

$$\overrightarrow{v_2}^{\perp} = \left\{ (x,y,z) \in (\mathbb{Z}_3)^3 | \begin{pmatrix} \overline{2} & \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{2} & \overline{1} \\ \overline{2} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} =$$

$$\left\{ (x,y,z) \in (\mathbb{Z}_3)^3 | \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} = \left\{ (x,y,z) \in (\mathbb{Z}_3)^3 | y + \overline{2}z = 0 \right\}$$

Pertanto $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}^{\perp} = \left\{ (x,y,z) \in (\mathbb{Z}_3)^3 | x + \overline{2}y + z = 0 \quad \text{e} \quad y + \overline{2}z = 0 \right\}$.

$\overrightarrow{v_3} = (\overline{0}, \overline{1}, \overline{1}) \in \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}^{\perp}$ e $Q(\overrightarrow{v_3}) = \overline{1}$. Essendo $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$ non isotropi e a due a due ortogonali, essi risulteranno linearmente indipendenti. Pertanto $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ é una base diagonalizzante per Q.

Poiché $Q(\overrightarrow{v_1}) = \overline{1}$, $Q(\overrightarrow{v_2}) = \overline{2}$ e $Q(\overrightarrow{v_3}) = \overline{1}$, la matrice B che rappresenta Q nella base $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ avrá la forma:

$$B = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{2} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}$$

per cui l'espressione di Q in tale base sará:

$$Q(x', y', z') = \begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = (x')^2 + \overline{2}(y')^2 + (z')^2$$

10. In base al teorema di Sylvester, esiste una base $\mathbb{E} = \{\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ di $\mathbb{R}^n$ in cui la forma bilineare b assume la forma:

$$b(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_r^2$$

con $p \leq r \leq n$. [La coppia $(p, r-p)$ é la segnatura di b].
Risulta subito che $r = n$, altrimenti $b(\overrightarrow{e_n}, \overrightarrow{e_n}) = 0$ e quindi $\overrightarrow{e_n} \in I_b(\mathbb{R}^n)$, contraddicendo l'ipotesi che $I_b(\mathbb{R}^n) = \{0\}$.
Per concludere basta verificare che $p = n$ oppure che $p = 0$: infatti nel primo caso risulterá che $b(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) > 0 \, \forall \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, mentre nel secondo caso si avrá che $b(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) < 0 \, \forall \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Supponiamo per assurdo che $1 \leq p < n$ e consideriamo l'equazione:

$$x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_n^2 = 0$$

equivalente alla seguente:

$$x_1^2 + \ldots + x_p^2 = x_{p+1}^2 + \cdots + x_n^2$$

Se esiste un vettore non nullo $\overrightarrow{x}$ verificante tale equazione, allora $b(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = 0$, cioé $\overrightarrow{x} \in I_b(\mathbb{R}^n)$ e si avrá dunque un assurdo.

Se $p \geq n-p$, basterá scegliere il vettore $\overrightarrow{x} = \{x_1, \ldots, x_n\} \in \mathbb{R}^n$ avente componenti:
$x_1 = \ldots = x_{n-p} = x_{p+1} = \ldots = x_n = 1$
e le rimaneti (eventuali) tutte nulle;

se invece $p < n-p$, scegliamo il vettore $\overrightarrow{x} = \{x_1, \ldots, x_n\} \in \mathbb{R}^n$ avente componenti:
$x_1 = \ldots = x_p = x_{n-p+1} = \ldots = x_n = 1$
e le rimaneti (eventuali) tutte nulle.

I vettori considerati verificano l'equazione precedente e forniscono quindi un assurdo.