Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Geometria 2

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. A. Verra

Tutrici: Dott.ssa Paola Stolfi e Annamaria Iezzi

SOLUZIONI TUTORATO NUMERO 3 (27 OTTOBRE 2009)

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

1. (a) Sia A la matrice associata alla forma bilineare F rispetto alla base b. Innanzitutto poichè F è simmetrica, A sarà della forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Inoltre:

$$\begin{cases} \overline{b_1}, \overline{b_2} \text{ sono isotropi} \Rightarrow F(\overline{b_1}, \overline{b_1}) = F(\overline{b_2}, \overline{b_2}) = 0 \Rightarrow a_{11} = a_{22} = 0 \\ F(\overline{b_1}, \overline{b_3}) = F(\overline{b_2}, \overline{b_3}) = 0 \Rightarrow a_{13} = a_{23} = 0 \\ F(\overline{b_1}, \overline{b_2}) = F(\overline{b_3}, \overline{b_3}) \Rightarrow a_{12} = a_{33} \end{cases}$$

Ponendo dunque $a = a_{33}$, la matrice A diventa:

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Infine sappiamo che F è non degenere, cioè che la matrice A associata a F ha rango massimo $\Rightarrow det(A) = -a^3 \neq 0 \Rightarrow a \neq 0$.

(b) Procediamo con il solito metodo induttivo.
$\overline{b_3} = (0, 0, 1)$ è un vettore non isotropo poichè a è supposto diverso da 0. Pertanto $\overline{v_1} = \overline{b_3}$ costituirá il primo vettore della base nostra diagonalizzante:

Allora $\mathbb{R}^3 = \langle \overline{v_1} \rangle \oplus \overline{v_1}^\perp$, dove $\overline{v_1}^\perp = \left\{ \overline{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | F(\overline{v_1}, \overline{x}) = 0 \right\}$.

$F(\overline{v_1}, \overline{x}) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow az = 0 \overset{a \neq 0}{\Rightarrow} z = 0$

Pertanto $\overline{v_1}^\perp = \left\{ \overline{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 0 \right\}$.

$\overline{v_2} = \overline{b_1} + \overline{b_2} = (1, 1, 0) \in \overline{v_1}^\perp$ e $F(\overline{v_2}, \overline{v_2}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2a \neq 0$

Essendo $\overline{v_1}$ e $\overline{v_2}$ entrambi non isotropi e ortogonali tra loro, essi risulteranno linearmente indipendenti. Pertanto $\overline{v_2}$ costituirà il secondo vettore della nostra base diagonalizzante e si avrà:
$\mathbb{R}^3 = \langle \overline{v_1}, \overline{v_2} \rangle \oplus \{\overline{v_1}, \overline{v_2}\}^{\perp}$.
A questo punto rimane da trovare $\overline{v_3} \in \{\overline{v_1}, \overline{v_2}\}^{\perp} = \overline{v_1}^{\perp} \cap \overline{v_2}^{\perp}$.

$\overline{v_2}^{\perp} = \big\{\overline{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | F(\overline{v_2}, \overline{x}) = 0\big\}$

$F(\overline{v_2}, \overline{x}) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$
$0 \Rightarrow ax + ay = 0 \overset{a \neq 0}{\Rightarrow} x + y = 0$

Pertanto $\{\overline{v_1}, \overline{v_2}\}^{\perp} = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 0 \quad \text{e} \quad x + y = 0\big\}$.

$\overline{v_3} = \overline{b_1} - \overline{b_2} = (1, -1, 0) \in \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}^{\perp}$ e $F(\overline{v_3}, \overline{v_3}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} =$
$-2a \neq 0$

Essendo $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v_3}$ non isotropi e a due a due ortogonali, essi risulteranno linearmente indipendenti.
Pertanto $\{\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v_3}\} = (\overline{b_3}, \overline{b_1} + \overline{b_2}, \overline{b_1} - \overline{b_2})$ rappresenta una base diagonalizzante per ogni F.

(c) Notiamo che $\overline{u} = \overline{b_1} - \overline{b_2} + \sqrt{2}\,\overline{b_3} = (1, -1, \sqrt{2})$ è un vettore isotropo. Infatti:

$F(\overline{u}, \overline{u}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & a & \sqrt{2}a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} =$
$-a - a + 2a = 0$

Questo implica che $\overline{u}$ non può far parte di una base diagonalizzante. Infatti se per assurdo lo fosse si avrebbe che F in tale base è rappresentata da una matrice diagonale B avente almeno uno 0 sulla diagonale. Ma una siffatta matrice B ha determinante nullo, cioè $r(B) < 3$, il che implicherebbe che $r(F) < 3$ ($= F$ è degenere), contraddicendo l'ipotesi, in quanto il rango di una forma bilineare non dipende dalla particolare base scelta.

2. La matrice A che rappresenta F rispetto alla base canonica è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 3 & 1 \\ \frac{1}{2} & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Il rango di F è dato dal rango della matrice A. Poichè $det(A) = \frac{7}{4} \neq 0$, A

ha rango massimo, pertanto $r(F) = 4$.
Per determinare la segnatura,invece, è necessario trovare una base diagonalizzante per F.

Poniamo $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{e_1}$ che come possiamo vedere dalla matrice che rappresenta F non é isotropo. Calcoliamo $\overrightarrow{v_1}^{\perp}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 3 & 1 \\ \frac{1}{2} & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} =$$

$x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z + w = 0$

Allora poniamo $\overrightarrow{v_2} = (0, 0, -2, 1)$ e controlliamo che non sia isotropo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 3 & 1 \\ \frac{1}{2} & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -3$$

Ora calcoliamo $\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle^{\perp}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 3 & 1 \\ \frac{1}{2} & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} =$$

$-5y + z - w = 0$

Quindi $\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle^{\perp}$ é l'insieme dei vettori che risolvono il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z + w = 0 \\ -5y + z - w = 0 \end{cases}$$

Poniamo allora $\overrightarrow{v_3} = (0, 1, 3, -2)$ e controlliamo che non sia isotropo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 3 & 1 \\ \frac{1}{2} & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 5$$

Ora calcoliamo $\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3} \rangle^{\perp}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 3 & 1 \\ \frac{1}{2} & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} =$$

$6y + z + 2w = 0$

Quindi $\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3} \rangle^{\perp}$ é l'insieme dei vettori che risolvono il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z+w=0 \\ -3y+5z+w=0 \\ 6y+z+2w=0 \end{cases}$$

Allora poniamo $\overrightarrow{v_4}=(-15,-6,-8,22)$ e controlliamo che non sia isotropo:

$$\begin{pmatrix} -15 & -6 & -8 & 22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 3 & 1 \\ \frac{1}{2} & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -15 \\ -6 \\ -8 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -15 \\ -6 \\ -8 \\ 22 \end{pmatrix} = -105$$

Allora la matrice che rappresenta Q in forma diagonale è $\mathbf{D} = {}^t\,\mathbf{PAP}$

dove $\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & -2 & 3 & -8 \\ 0 & 1 & -2 & 22 \end{pmatrix}$ è la matrice del cambiamento di coordianate.

Dunque $\mathbf{D}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -105 \end{pmatrix}$

La segnatura è quindi (p,q)=(2,2).

3. Dati $\overrightarrow{x}=(x_1,x_2,x_3)$, $\overrightarrow{y}=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$, $\langle\,,\rangle$ è definito nel modo seguente:

$$\langle\, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\,\rangle = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Applicando il procedimento di Gram-Schmidt alla base canonica $\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\}$ di $\mathbb{R}^3$ si ottiene:

$\overrightarrow{v_1}=\overrightarrow{e_1}=(1,0,0)$

$\overrightarrow{v_2}=\overrightarrow{e_2}-\dfrac{\langle\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{e_2}\rangle}{\langle\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_1}\rangle}\overrightarrow{v_1}=(0,1,0)-1(1,0,0)=(-1,1,0)$

$\overrightarrow{v_3}=\overrightarrow{e_3}-\dfrac{\langle\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{e_3}\rangle}{\langle\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_2}\rangle}\overrightarrow{v_2}-\dfrac{\langle\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{e_3}\rangle}{\langle\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_1}\rangle}\overrightarrow{v_1}=(0,0,1)-1(-1,1,0)-1(1,0,0)=(0,-1,1)$

Quindi $\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3}\}$ è una base ortogonale per $\langle,\rangle$.

4. - Sia A la matrice associata alla forma bilineare F rispetto alla base canonica. Innanzitutto poichè F è simmetrica, A sarà della forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Inoltre:

(a) $\overline{e_1}, \overline{e_2}$ sono isotropi $\Rightarrow F(\overline{b_1}, \overline{b_1}) = F(\overline{b_2}, \overline{b_2}) = 0 \Rightarrow a_{11} = a_{22} = 0$
Ponendo dunque $a = a_{12}, b = a_{13}, c = a_{23}, d = a_{33}$, la matrice A diventa:

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & d \end{pmatrix}$$

(b) $\overline{v}^{\perp} = \langle \overline{e_1}, \overline{e_2} \rangle$.

- **Primo metodo**

  Troviamo un'equazione cartesiana per $\overline{v}^{\perp}$ e per $\langle \overline{e_1}, \overline{e_2} \rangle$.

  - $\overline{v}^{\perp} = \left\{ \overline{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | F(\overline{x}, \overline{v}) = 0 \right\}$
    Pertanto un'equazione cartesiana di $\overline{v}^{\perp}$ è data da:

  $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (a+b)x + (a+c)y + (b+c+d)z = 0$$

  - Un'equazione cartesiana per il sottospazio $\langle \overline{e_1}, \overline{e_2} \rangle$ è invece data da $z = 0$ (quest'ultima poteva essere anche ricavata notando che il sottospazio $\langle \overline{e_1}, \overline{e_2} \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$ rappresenta geometricamente il piano generato dai vettori $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$ e passante per il punto $(0, 0, 0)$ la cui equazione cartesiana è data da:

  $$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow z = 0)$$

  A questo punto, affinchè le due equazioni cartesiane definiscano il medesimo sottospazio di dimensione 2, si dovrà avere:

  $$\begin{cases} a + b = 0 \\ a + c = 0 \\ b + c + d \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -a \\ c = -a \\ d \neq 2a \end{cases}$$

- **Secondo metodo**
  Basta imporre che $\overline{e_1}, \overline{e_2} \in \overline{v}^{\perp}$ e $\overline{e_3} \notin \overline{v}^{\perp}$. Verifichiamo che sotto queste condizioni si ha: $\langle \overline{e_1}, \overline{e_2} \rangle = \overline{v}^{\perp}$.

  ($\subseteq$) Se $\overline{x} \in \langle \overline{e_1}, \overline{e_2} \rangle \Rightarrow \overline{x} = x_1\overline{e_1} + x_2\overline{e_2} \Rightarrow F(\overline{x}, \overline{v}) = F(x_1\overline{e_1} + x_2\overline{e_2}, \overline{v}) = x_1 F(\overline{e_1}, \overline{v}) + x_2 F(\overline{e_2}, \overline{v}) = 0 \Rightarrow \overline{x} \in \overline{v}^{\perp}$.

  ($\supseteq$) Se $\overline{x} = x_1\overline{e_1} + x_2\overline{e_2} + x_3\overline{e_3} \in \overline{v}^{\perp} \Rightarrow F(\overline{x}, \overline{v}) = 0 \Rightarrow F(x_1\overline{e_1} + x_2\overline{e_2} + x_3\overline{e_3}, \overline{v}) = 0 \Rightarrow x_1 F(\overline{e_1}, \overline{v}) + x_2 F(\overline{e_2}, \overline{v}) + x_3 F(\overline{e_3}, \overline{v}) = 0 \Rightarrow x_3 F(\overline{e_3}, \overline{v}) = 0 \Rightarrow x_3 = 0 \Rightarrow \overline{x} = x_1\overline{e_1} + x_2\overline{e_2} \Rightarrow \overline{x} \in \langle \overline{e_1}, \overline{e_2} \rangle$.

Dunque imponendo:

$$\begin{cases} F(\overline{e_1}, \overline{v}) = 0 \\ F(\overline{e_2}, \overline{v}) = 0 \\ F(\overline{e_3}, \overline{v}) \neq 0 \end{cases}$$

otteniamo nuovamente il sistema:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a + c = 0 \\ b + c + d \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -a \\ c = -a \\ d \neq 2a \end{cases}$$

In definitiva la matrice A diventa:

$$\begin{pmatrix} 0 & a & -a \\ a & 0 & -a \\ -a & -a & d \end{pmatrix}$$

Escludiamo il caso in cui $a = d = 0$, perchè in tal caso F è la forma bilineare nulla.
Per trovare una base diagonalizzante per F, al variare di a e d, distinguiamo per prima cosa il caso in cui F sia degenere e il caso in cui non lo sia.

$det(A) = 2a^3 - a^2 d = a^2(2a - d) \Rightarrow det(A) = 0$ se e solo se $a = 0$ (ricordiamo che $d \neq 2a$ per quanto visto prima).

$\underline{a = 0}$
In questo caso A diventa

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

A è già in forma diagonale; pertanto $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$ rappresenta una base diagonalizzante per F.
Inoltre $r(F) = r(A) = 1$ e la segnatura è $(1, 0)$ se $d > 0$ e $(0, 1)$ se $d < 0$.

$\underline{a \neq 0}$
In questo caso, poichè $det(A) \neq 0$, F è non degenere e quindi $r(F) = 3$.

Diagonalizziamo F, procedendo con il solito metodo induttivo.
$\overline{e_1}$ e $\overline{e_2}$ sono vettori isotropi tali che $F(\overline{e_1}, \overline{e_2}) = a \neq 0$. Quindi $\overline{e_1} + \overline{e_2} = (1, 1, 0)$ è un vettore sicuramente non isotropo. Pertanto $\overline{v_1} = (1, 1, 0)$ costituirá il primo vettore della base nostra diagonalizzante:

Allora $\mathbb{R}^3 = \langle \overline{v_1} \rangle \oplus \overline{v_1}^\perp$, dove $\overline{v_1}^\perp = \left\{ \overline{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | F(\overline{v_1}, \overline{x}) = 0 \right\}$.

$F(\overline{v_1},\overline{x})=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & a & -a\\ a & 0 & -a\\ -a & -a & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}a & a & -2a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=$
$0 \Rightarrow ax+ay-2az=0 \overset{a\neq 0}{\Rightarrow} x+y-2z=0$

Pertanto $\overline{v_1}^{\perp}=\{\overline{x}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x+y-2z=0\}$.

$\overline{v_2}=(1,-1,0)\in\overline{v_1}^{\perp}$ e $F(\overline{v_2},\overline{v_2})=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & a & -a\\ a & 0 & -a\\ -a & -a & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}=$
$-2a\neq 0$

Essendo $\overline{v_1}$ e $\overline{v_2}$ entrambi non isotropi e ortogonali tra loro, essi risulteranno linearmente indipendenti. Pertanto $\overline{v_2}$ costituirà il secondo vettore della nostra base diagonalizzante e si avrà:
$\mathbb{R}^3=\langle\overline{v_1},\overline{v_2}\rangle\oplus\{\overline{v_1},\overline{v_2}\}^{\perp}$.
A questo punto rimane da trovare $\overline{v_3}\in\{\overline{v_1},\overline{v_2}\}^{\perp}=\overline{v_1}^{\perp}\cap\overline{v_2}^{\perp}$.

$\overline{v_2}^{\perp}=\{\overline{x}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | F(\overline{v_2},\overline{x})=0\}$

$F(\overline{v_2},\overline{x})=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & a & -a\\ a & 0 & -a\\ -a & -a & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}-a & a & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=$
$0 \Rightarrow -ax+ay=0 \overset{a\neq 0}{\Rightarrow} -x+y=0$

Pertanto $\{\overline{v_1},\overline{v_2}\}^{\perp}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x+y-2z=0 \quad \text{e} \quad -x+y=0\}$.

$\overline{v_3}=(1,1,1)\in\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}\}^{\perp}$ e $F(\overline{v_3},\overline{v_3})=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & a & -a\\ a & 0 & -a\\ -a & -a & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=$
$-2a+d\neq 0$

Essendo $\overline{v_1},\overline{v_2},\overline{v_3}$ non isotropi e a due a due ortogonali, essi risulteranno linearmente indipendenti. Pertanto $\{\overline{v_1},\overline{v_2},\overline{v_3}\}=\{(1,1,0),(1,-1,0),(1,1,1)\}$ rappresenta una base diagonalizzante per ogni F non degenere.

Sia B la matrice che rappresenta F in questa base. Allora detta P la matrice del cambiamento di base dalla base $\{\overline{v_1},\overline{v_2},\overline{v_3}\}$ alla base $\{\overline{e_1},\overline{e_2},\overline{e_3}\}$:

$$P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

si ha $B={}^tPAP=\begin{pmatrix}2a & 0 & 0\\ 0 & -2a & 0\\ 0 & 0 & -2a+d\end{pmatrix}$

Possiamo ora determinare la segnatura di F al variare di a e d. Notiamo innanzitutto che la segnatura è del tipo $(1,2)$ o $(2,1)$ poichè $2a$ e $-2a$ sono opposti e $a\neq 0$.
Quindi la segnatura è $(1,2)$ se $-2a+d<0$, cioè $d<2a$; altrimenti,

se $d > 2a$, la segnatura è $(2, 1)$.

- Riesco a trovare due vettori linearmente indipendenti $\overline{a}, \overline{b}$ che generano un sottospazio sul quale F è definita positiva se e solo se l'indice di positività p è ≥ 2.
  In tal caso se $\{\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v_3}\}$ è una base diagonalizzante per F esistono $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ tali che ad esempio $F(\overline{v_1}, \overline{v_1}) = \lambda_1$ e $F(\overline{v_2}, \overline{v_2}) = \lambda_2$.
  Allora se poniamo $\overline{a} = \overline{v_1}$ e $\overline{b} = \overline{v_2}$, $\overline{a}$ e $\overline{b}$ verificano la condizione richiesta.
  Verifichiamo che sul sottospazio $\langle \overline{a}, \overline{b} \rangle$ F è definita positiva, cioè che $\forall\, \overline{x} \in \langle \overline{a}, \overline{b} \rangle$ $F(\overline{x}, \overline{x}) > 0$, se $\overline{x} \neq \overline{0}$.
  Infatti se $\overline{x} \in \langle \overline{a}, \overline{b} \rangle \Rightarrow \overline{x} = x_1\overline{a} + x_2\overline{b} \Rightarrow F(x_1\overline{a} + x_2\overline{b}, x_1\overline{a} + x_2\overline{b}) = x_1^2 F(\overline{a}, \overline{a}) + x_2^2 F(\overline{b}, \overline{b}) + 2x_1x_2F(\overline{a}, \overline{b}) = x_1^2 F(\overline{a}, \overline{a}) + x_2^2 F(\overline{b}, \overline{b}) = x_1^2\lambda_1 + x_2^2\lambda_2 > 0$ se $x_1, x_2 \neq 0$, cioè se $\overline{x} \neq \overline{0}$ (nel penultimo passaggio si è utilizzato il fatto che $\overline{a}, \overline{b}$ sono ortogonali in quanto fanno parte di una base diagonalizzante).

  Nel nostro caso allora due siffatti vettori $\overline{a}, \overline{b}$ esistono solo per $d > 2a$ e $a \neq 0$.
  Se $a > 0$, prendiamo ad esempio $\overline{a} = (1, 1, 0)$ e $\overline{b} = (1, 1, 1)$.
  Altrimenti se $a < 0$ prendiamo $\overline{a} = (1, -1, 0)$ e $\overline{b} = (1, 1, 1)$.

- Poniamo $\overline{w} = \overline{e_1} + \overline{e_2} + \overline{v} = (2, 2, 1)$.

$$F(\overline{w}, \overline{w}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & -a \\ a & 0 & -a \\ -a & -a & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = d$$

  Osserviamo quindi che se $d = 0$ $\overline{w}$ è un vettore isotropo. In tal caso quindi $\overline{w}$ non può far parte di una base diagonalizzante, a meno che F non sia degenere, cioè a meno che a non sia 0; ma se $a = d = 0$ F è la forma bilineare nulla e in tal caso ogni terna di vettori lineramente indipendenti costituisce una base diagonalizzante; quindi per $a = d = 0$ una base diagonalizzante contenente il vettore $\overline{w}$ è data ad esempio da $\{\overline{w}, \overline{e_1}, \overline{e_2}\}$.

  Supponiamo quindi $d \neq 0$.

  Per $a = 0$, una base diagonalizzante contenente il vettore $\overline{w}$ è data da $\{\overline{w}, \overline{e_1}, \overline{e_2}\}$ (questo si può verificare facilmente ripetendo il solito metodo induttivo in cui sia stato scelto $\overline{w}$ come primo vettore e notando che, avendo il tal caso la matrice A rango 1, una base diagonalizzante per F conterrà esattamente 2 vettori isotropi).

  Mettiamoci ora nel caso in cui anche $a \neq 0$.
  Per trovare una base diagonalizzante contenente il vettore $\overline{w}$, ripetiamo il solito metodo induttivo scegliendo ora $\overline{v_1} = \overline{w}$, in modo tale che esso rappresenti il primo vettore della base diagonalizzante che andremo a costruirci.

Allora $\mathbb{R}^3 = \langle\overline{v_1}\rangle \oplus \overline{v_1}^{\perp}$, dove $\overline{v_1}^{\perp} = \big\{\overline{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | F(\overline{v_1}, \overline{x}) = 0\big\}$.

$$F(\overline{v_1}, \overline{x}) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & -a \\ a & 0 & -a \\ -a & -a & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & a & -4a+d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$
$$0 \Rightarrow ax + ay + (-4a + d)z = 0$$

Pertanto $\overline{v_1}^{\perp} = \big\{\overline{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | ax + ay + (-4a + d)z = 0\big\}$.

$$\overline{v_2} = (1, -1, 0) \in \overline{v_1}^{\perp} \text{ e } F(\overline{v_2}, \overline{v_2}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & -a \\ a & 0 & -a \\ -a & -a & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2a \neq 0$$

Essendo $\overline{v_1}$ e $\overline{v_2}$ entrambi non isotropi e ortogonali tra loro, essi risulteranno linearmente indipendenti. Pertanto $\overline{v_2}$ costituirà il secondo vettore della nostra base diagonalizzante e si avrà:
$\mathbb{R}^3 = \langle\overline{v_1}, \overline{v_2}\rangle \oplus \{\overline{v_1}, \overline{v_2}\}^{\perp}$.
A questo punto rimane da trovare $\overline{v_3} \in \{\overline{v_1}, \overline{v_2}\}^{\perp} = \overline{v_1}^{\perp} \cap \overline{v_2}^{\perp}$.

$\overline{v_2}^{\perp} = \big\{\overline{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | F(\overline{v_2}, \overline{x}) = 0\big\}$

$$F(\overline{v_2}, \overline{x}) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & -a \\ a & 0 & -a \\ -a & -a & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -a & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$
$$0 \Rightarrow -ax + ay = 0 \overset{a \neq 0}{\Rightarrow} -x + y = 0$$

Pertanto $\{\overline{v_1}, \overline{v_2}\}^{\perp} = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | ax + ay + (-4a + d)z = 0 \quad \text{e} \quad -x + y = 0\big\}$.

Risolviamo quindi il sistema:

$$\begin{cases} ax + ay + (-4a + d)z = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2ax + (-4a + d)z = 0 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{(4a-d)}{2a} z \\ y = x \end{cases}$$

$\overline{v_3} = (4a - d, 4a - d, 2a) \in \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}^{\perp}$ e

$$F(\overline{v_3}, \overline{v_3}) = \begin{pmatrix} 4a - d & 4a - d & 2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & -a \\ a & 0 & -a \\ -a & -a & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4a - d \\ 4a - d \\ 2a \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -2a^2 + a(4a - d) & -2a^2 + a(4a - d) & -2a(4a - d) + 2ad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4a - d \\ 4a - d \\ 2a \end{pmatrix} =$$

$= 2ad(d - 2a) \neq 0$ poichè siamo nel caso $d \neq 0 \neq a$, mentre $d \neq 2a$ per ipotesi.
Essendo $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v_3}$ non isotropi e a due a due ortogonali, essi risulteranno linearmente indipendenti. Pertanto:

$$\{\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v_3}\} = \{(2, 2, 1), (1, -1, 0), (4a - d, 4a - d, 2a)\}$$

rappresenta una base diagonalizzante contenente $\overline{w} = (2, 2, 1)$.

5. Dati $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\overrightarrow{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, ricordiamo che il prodotto scalare standard è così definito:

$$\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

Applicando allora il procedimento di Gram-Schidt alla base v formata dai vettori $\overrightarrow{v_1} = (1,0,1), \overrightarrow{v_2} = (0,1,1), \overrightarrow{v_3} = (0,1,-1)$ si ottiene:

$$\overrightarrow{w_1} = \overrightarrow{v_1} = (1,0,1)$$

$$\overrightarrow{w_2} = \overrightarrow{v_2} - \frac{\langle \overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle}{\langle \overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_1} \rangle}\overrightarrow{w_1} = (0,1,1) - \frac{1}{2}(1,0,1) = (-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$$

$$\overrightarrow{w_3} = \overrightarrow{v_3} - \frac{\langle \overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{v_3} \rangle}{\langle \overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{w_2} \rangle}\overrightarrow{w_2} - \frac{\langle \overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{v_3} \rangle}{\langle \overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_1} \rangle}\overrightarrow{w_1} = (0,1,-1) - \frac{1}{3}(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(1,0,1) = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$$

$w = \{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{w_3}\}$ è una base ortogonale per $\langle\,\rangle$. Allora normalizzando ciascun vettore della base w si ottiene la base ortonormale f cercata, costituita dai vettori:

$$\overrightarrow{f_1} = \frac{\overrightarrow{w_1}}{\|\overrightarrow{w_1}\|} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$$
$$\overrightarrow{f_2} = \frac{\overrightarrow{w_2}}{\|\overrightarrow{w_2}\|} = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$$
$$\overrightarrow{f_3} = \frac{\overrightarrow{w_3}}{\|\overrightarrow{w_3}\|} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$$

Sia ora $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ la matrice del cambiamento di coordinate dalla base f alla base canonica. Allora poichè A verifica la relazione $\mathbf{A^tA} = \mathbf{Id}$, A è una matrice ortogonale.

6. - <u>Dim.1</u>
   Supponiamo per assurdo che $F(\overline{v}, \overline{v}) = 0 \forall \overline{v} \in V$. Sappiamo che se $charK \neq 2$, per ogni forma bilineare simmetrica esiste una base diagonalizzante. Sia dunque $b = \{\overline{b_1}, \overline{b_2}, \overline{b_3}\}$ una base diagonalizzante per F; allora per quanto supposto, $\overline{b_i}$ è isotropo per $i = 1,2,3$ e quindi la matrice che rappresenta F in tale base è la matrice nulla, cioè F è la forma bilineare nulla. Ma questo é un assurdo perché contraddice l'ipotesi che F sia non nulla.

   - <u>Dim.2</u>
   Poichè F è non nulla $\exists\,(\overline{x}, \overline{y}) \in V \times V$ tale che $F(\overline{x}, \overline{y}) \neq 0$.

   $$F(\overline{x} + \overline{y}, \overline{x} + \overline{y}) = F(\overline{x}, \overline{x}) + F(\overline{y}, \overline{y}) + 2F(\overline{x}, \overline{y}).$$

   Notiamo che, poichè $charK \neq 2$, $2F(\overline{x}, \overline{y}) \neq 0$, essendo $F(\overline{x}, \overline{y}) \neq 0$.

Abbiamo allora 3 opportunità:
1) $\overline{x}$ è non isotropo;
2) $\overline{y}$ è non isotropo;
3) nel caso in cui sia $\overline{x}$ che $\overline{y}$ siano isotropi si ha $F(\overline{x}+\overline{y}, \overline{x}+\overline{y}) = 2F(\overline{x}, \overline{y}) \neq 0$ cioè $\overline{x}+\overline{y}$ è non isotropo.

In ogni caso esiste un vettore non isotropo.