Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Geometria 2

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. A. Verra
Tutori: Dott.ssa Paola Stolfi e Annamaria Iezzi

TUTORATO NUMERO 1 (6 OTTOBRE 2009)
FORME BILINEARI

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

1. Stabilire quali delle seguenti sono forme bilineari su $\mathbb{R}^2$:

   (a) $F((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = 2x_1y_1 - x_1y_2 + 3x_2y_1 - 5x_2y_2$

   (b) $G((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_1 - x_1^3y_2$

2. Stabilire quali delle seguenti sono forme bilineari su $\mathbb{R}^n$:

   (a) $F(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}) = \Big(\sum_{i=1}^{n}(x_i)\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n}(y_j)\Big)$

   (b) $F(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}) = \sum_{j=1}^{n}(x_j+y_j)^2 - \sum_{j=1}^{n}(x_j)^2 - \sum_{j=1}^{n}(y_j)^2$

   (c) $F(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}) = \big|\sum_{j=1}^{n}(x_jy_j)\big|$

3. Data la forma bilineare $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da:

   $$F(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}) = 2x_1y_1 + x_1y_3 + 2x_2y_3 + x_3y_1 + 2x_3y_2 - 4x_3y_3$$

   $\forall \overrightarrow{x},\overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^3, \quad \overrightarrow{x} = (x_1,x_2,x_3) \quad \overrightarrow{y} = (y_1,y_2,y_3).$

   (a) Stabilire se F é simmetrica.

   (b) Scrivere la matrice A che rappresenta F rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

   (c) Verificare che il vettore $\overrightarrow{u} = e_1 + e_3$ é isotropo.

   (d) Verificare che i vettori $\overrightarrow{v} = (1,2,0)$ e $\overrightarrow{w} = (-5,\sqrt{3},2)$ sono F-ortogonali.

   (e) Determinare $\langle(1,1,2),(1,0,1)\rangle^{\perp}$.

4. Data la matrice:

   $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Scrivere la forma bilineare G definita, rispetto alla base canonica $\mathbb{E} = (\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{e_4})$, dalla matrice A.

(b) Verificare che G é degenere e individuare due vettori non nulli $\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0} \in \mathbb{R}^4$ tali che $G(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y}) = 0 \, \forall \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^4$ e $G(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y_0}) = 0 \, \forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^4$.

(c) Scrivere la matrice di G rispetto alla base $b = \{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}, \overrightarrow{b_4}\}$, dove

$$\overrightarrow{b_1} = \overrightarrow{e_1} \qquad \overrightarrow{b_2} = -\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_4} \qquad \overrightarrow{b_3} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} \qquad \overrightarrow{b_4} = \overrightarrow{e_3}$$

5. Sia $x_0 = (-1, 3, 2) \in \mathbb{R}^3$ e sia F la forma bilineare simmetrica di $\mathbb{R}^3$ definita rispetto alla base canonica $\mathbb{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ dalla matrice:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Verificare che il vettore $\overrightarrow{x_0}$ non é F-isotropo.

(b) Determinare due vettori $\overrightarrow{y'}, \overrightarrow{y''} \in \mathbb{R}^3$ tali che:

$$\overrightarrow{y'} + \overrightarrow{y''} = \overrightarrow{e_2}, \quad \text{con} \quad \overrightarrow{y'} \parallel \overrightarrow{x_0} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{y''} \perp \overrightarrow{x_0}$$

(c) Determinare un'equazione cartesiana di $\overrightarrow{e_2}^{\perp}$.

6. Sia $D : K^2 \times K^2 \to K$ l'applicazione cosí definita:

$$D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1, \quad \forall \, \mathbf{x} = (x_1, x_2), \, \mathbf{y} = (y_1, y_2) \in K^2.$$

(a) Verificare che l'applicazione D (detta applicazione determinante) é una forma bilineare antisimmetrica.

(b) Scrivere la matrice di D rispetto alla base canonica $\mathbb{E}$ di K^2.

(c) Calcolare il cono isotropo $I_D(K^2)$.

7. Diagonalizzare le seguenti matrici:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$