Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Geometria 2

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. A. Verra

Tutrici: Dott.ssa Paola Stolfi e Annamaria Iezzi

Tutorato numero 2 (21 Ottobre 2009)
Forme quadratiche e prodotti scalari

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

1. Diagonalizzare ciascuna delle seguenti forme quadratiche, determinando il relativo cambiamento di coordinate e la segnatura di Q:
   (a) $Q(x,y,z) = xz + xy + yz$
   (b) $Q(x,y,z) = -x^2 - 4xy + 3y^2 + 2z^2$
   (c) $Q(x,y,z) = 2xy + y^2 - 2xz$

2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ con base $\mathbb{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$, é assegnata la forma quadratica $Q : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ cosí definita:
$$Q(\overrightarrow{x}) = x_2^2 - x_4^2 + 2x_1x_4 - 4x_2x_3, \quad \forall \overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4.$$
   (a) Determinare l'espressione di Q rispetto ad una sua base diagonalizzante. Indicare il rango e la segnatura di Q.
   (b) Scrivere l'espressione canonica (o di Sylvester) di Q, determinando una base rispetto a cui Q si scrive in forma canonica.

3. Si consideri in $\mathbb{R}^3$ la forma bilineare b cosí definita:
$$b(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + 3x_3y_3, \forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^3.$$
   (a) Scrivere la matrice di b rispetto alla base canonica $\mathbb{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ di $\mathbb{R}^3$ e verificare che b é un prodotto scalare.
   (b) Trovare una base ortogonale e una base ortonormale per b.

4. Dimostrare che in uno spazio vettoriale euclideo $(V, \langle\, , \rangle)$ sussistono le seguenti identitá, $\forall\, v, w \in V$:
   (a) $\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\,\|v\|^2 + 2\,\|w\|^2$
   (b) $\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2 = 4\,\langle v, w\rangle$.

5. (a) Verificare che ponendo
   $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 6x_2y_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + x_3y_3 - x_2y_3 - x_3y_2 + x_4y_4$
   si definisce un prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$

(b) Utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt, si ortogonalizzi la base canonica di $\mathbb{R}^4$ rispetto a questo prodotto scalare.

6. In ciascuno dei seguenti casi determinare una base ortonormale del sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori assegnati:

   (a) $(2, 0, 0, 1), (1, 2, 2, 3), (10, -1, -\frac{1}{2}, 0), (5, 2, 2, 5)$
   (b) $(-1, 0, 1, 1), (2, 1, 1, 4), (0, 1, 3, 6)$
   (c) $(1, 1, -1, 1), (-2, -2, 2, -2), (2, 1, 1, 2), (3, 1, 1, 1)$
   (d) $(1, 1, 0, -1), (-2, 1, \sqrt{3}, 5), (4, 4, \sqrt{3}, 2), (-6, -3, 0, 3)$.

7. Trovare una base ortonormale del sottospazio $V = \{(x, y, z) | x + y - z = 0\}$ di $\mathbb{R}^3$. Completare poi la base trovata a base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

8. Sia $\overrightarrow{u} = (-1, 0, 1)$ un vettore di $\mathbb{R}^3$, dotato di prodotto scalare standard. Determinare i vettori ortogonali ad $\overrightarrow{u}$, aventi norma 2 e verificanti una delle due condizioni:

   (a) sono complanari con $\overrightarrow{u_1} = (1, 0, 1)$ e $\overrightarrow{u_2} = (0, 1, -1)$;
   (b) formano un angolo $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ con $\overrightarrow{u_3} = (-1, 1, 0)$.

9. É assegnato il polinomio

$$P = x^2 - \overline{2}y^2 + xy - xz \in \mathbb{Z}_3 [x, y, z] .$$

   Sia $V = (\mathbb{Z}_3)^3$ e si fissi in V la base $\mathbb{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$.

   (a) Scrivete la matrice A della forma quadratica Q associata al polinomio P (in base $\mathbb{E}$) e determinarne il rango.
   (b) Diagonalizzare Q e indicarne l'espressione in una base Q-diagonalizzante.

10. Sia $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica tale che $I_b(\mathbb{R}^n) = \{0\}$. Dimostrare, utilizzando il teorema di Sylvester, che risulta:

$$b(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) > 0, \forall \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad \text{oppure} \quad b(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) < 0, \forall \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

    [cioé b é definita positiva o definita negativa].