Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Geometria 2

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. A. Verra
Tutrici: Dott.ssa Paola Stolfi e Annamaria Iezzi

Tutorato numero 3 (27 Ottobre 2009)

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

1. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 3 e sia $\overline{b_1}, \overline{b_2}, \overline{b_3}$ una sua base b. Si determino:

   (a) Le matrici rispetto a b delle forme bilineari simmetriche F tali che
   - F è non degenere;
   - $\overline{b_1}, \overline{b_2}$ sono isotropi;
   - $F(\overline{b_1}, \overline{b_3}) = F(\overline{b_2}, \overline{b_3}) = 0$;
   - $F(\overline{b_1}, \overline{b_2}) = F(\overline{b_3}, \overline{b_3})$.

   (b) Determinare una base diagonalizzante per ogni F.

   (c) Dire se $\overline{b_1} - \overline{b_2} + \sqrt{2}\,\overline{b_3}$ può appartenere a una base diagonalizzante di F.

   (Prova di esonero del 10-11-2008)

2. Sia $F : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare che ha per forma quadratica associata, rispetto alla base canonica, la forma:

$$q(\overline{v}) = x^2 + xy - y^2 + xz + 6yz + 2xt + 2yt + 2zt + t^2$$

   Determinare la segnatura e il rango di F.
   (Prova di esonero del 10-11-2008)

3. Sia $\langle\,,\rangle$ il prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ che ha, come matrice associata, rispetto alla base canonica, la seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

   Applicando il procedimento di Gram-Schmidt alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ costruire una base ortogonale per $\langle\,,\rangle$.
   (Prova di esonero del 10-11-2008)

4. Si determinino, scrivendone la matrice associata rispetto alla base canonica $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$, tutte le forme bilineari simmetriche

$$F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

   soddisfacenti alle condizioni seguenti:

(a) $\overline{e_1}$ e $\overline{e_2}$ sono vettori isotropi;

(b) Lo spazio ortogonale di $\overline{v} = (1,1,1)$ rispetto a F è il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $\overline{e_1}, \overline{e_2}$.

Al variare di F si determini:

- una base diagonalizzante per F e se ne deducano segnatura e rango.
- Due vettori linearmente indipendenti $\overline{a}, \overline{b}$ e che generano un sottospazio sul quale F è definita positiva.
- Una base diagonalizzante contenente il vettore $\overline{e_1} + \overline{e_2} + \overline{v}$.

(Prova di esonero del 5-11-2007)

5. Si determini una base ortonormale f di $\mathbb{R}^3$, rispetto al prodotto scalare standard, applicando il procedimento di Gram-Schidt alla base v formata dai vettori $\overline{v_1} = (1,0,1), \overline{v_2} = (0,1,1), \overline{v_3} = (0,1,-1)$.
Si verifichi che la matrice del cambiamento di base dalla base f alla base canonica e è una matrice ortogonale.
(Prova di esonero del 5-11-2007)

6. Dimostrare che se $char K \neq 2$ ogni forma bilineare simmetrica $F : V \times V \to K$ che sia non nulla ha un vettore non isotropo.