Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Geometria 2

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. A. Verra
Tutori: Dott.ssa Paola Stolfi e Annamaria Iezzi

Tutorato numero 4 (25 Novembre 2009)
Affinità e Teorema spettrale

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

1. Sia f un'affinità di $\mathbb{A}$. Verificare che se f fissa due punti P e $Q \in \mathbb{A}$ allora f fissa tutti i punti della retta r passante per P e Q.

2. Sia $\mathbb{A} = \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ un piano affine con riferimento Oe_1e_2.
   (a) Determinare l'equazione di ogni affinità f di $\mathbb{A}$ che fissa i punti della retta r di equazione $x + y = 1$.
   (b) Considerati i punti $P = (1, 2)$, $Q = (2, 1) \in \mathbb{A}$, tra le affinità considerate in (a) determinare quelle (eventuali) che trasformano P in Q.
   (c) Tra le affinità considerate in (a) determinare eventuali traslazioni.

3. Sia $\mathbb{A} = \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ uno spazio affine con riferimento $Oe_1e_2e_3$. Sia $f = (f, \varphi)$ l'affinità di $\mathbb{A}$ definita dalle seguenti condizioni:

   $f(P) = P'$, con $P = (1, 2, 0)$ e $P' = (2, -1, 1)$
   $f(Q) = Q'$, con $Q = (1, 3, 1)$ e $Q' = (3, -1, 0)$
   $\varphi(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_3}$; $\qquad \varphi(\overrightarrow{e_2}) = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$.

   (a) Determinare le equazioni di f.
   (b) Determinare i punti fissi di$f$.

4. Sia fissato un riferimento cartesiano Oe_1e_2 di $\mathbb{E}^2$.
   (a) Scrivere l'equazione della rotazione $R_{P,\vartheta}$ di $\mathbb{E}^2$ di centro $P = (1, 2)$ ed angolo $\vartheta = \frac{\pi}{3}$ (in senso antiorario).
   (b) Scrivere le equazioni della riflessione ρ_r, con r avente equazione $x - y + 1 = 0$.
   (c) Scrivere le equazioni della riflessione ρ_s tale che $\rho_r \circ \rho_s = R_{P,\vartheta}$; individuare la retta s (passante per P).

5. Sia fissato un riferimento cartesiano Oe_1e_2 di $\mathbb{E}^2$. Sia f la rotazione di centro $C = (1, 0)$ ed angolo $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ (in senso antiorario). Sia g la riflessione di asse la retta $x = 0$.
   (a) Scrivere le equazioni dell'isometria $g \circ f$.

(b) Dire se tale isometria è una traslazione, una rotazione, una glissoriflessione o una rotazione di $\mathbb{E}^2$.

6. In $\mathbb{R}^2$ è assegnato un prodotto scalare $\langle , \rangle$ definito rispetto ad una base $\mathbb{E}$ dalla matrice
$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, sia $T_\alpha : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'operatore definito (in base $\mathbb{E}$) dalla matrice
$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
(a) Verificare che T_α non è unitario $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

(b) Verificare che T_α è autoaggiunto $\Longleftrightarrow \alpha = 2$.

(c) Determinare una base ortonormale $\mathbb{F}$ di $\mathbb{R}^2$ e verificare che (rispetto ad $\mathbb{F}$) la matrice di T_2 è simmetrica.

(d) Trovare una base ortonormale che diagonalizzi T_2.

7. In $\mathbb{R}^4$, dotato di prodotto scalare standard, è assegnato l'operatore lineare T definito, rispetto alla base canonica E di $\mathbb{R}^4$, dalla matrice
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Determinare una base ortonormale F di autovettori di T e scrivere la matrice di T rispetto a tale base.