Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE210

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. A. Verra

Tutori: Simona Dimase e Annamaria Iezzi

Soluzioni tutorato numero 3 (21 Ottobre 2010)
Prodotto scalare e ortonormalizzazione

1. In ciascuno dei seguenti casi determinare una base ortonormale del sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori assegnati:

   (a) $(1,0,0,1),(0,1,2,3),(1,-1,1,-1)$

   (b) $(-1,0,1,2),(2,0,1,-4),(0,0,3,0),(-3,0,0,6)$

   (c) $\{(1,n,n^2,n^3)\,|\,n\in\mathbb{N}\}$

   Soluzione:

   Il procedimento di Gram-Schmidt permette di trovare, a partire da una successione finita o infinita di vettori $\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3},\cdots\}$, un'altra successione $\{\overrightarrow{w_1},\overrightarrow{w_2},\overrightarrow{w_3},\cdots\}$ tale che $\forall\, k\geq 1$ si abbia $\langle\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\cdots,\overrightarrow{v_k}\rangle=\langle\overrightarrow{w_1},\overrightarrow{v_2},\cdots,\overrightarrow{w_k}\rangle$, con $\overrightarrow{w_1},\overrightarrow{w_2},\cdots,\overrightarrow{w_k}$ a due a due ortogonali.

   (a) $\left\{\overrightarrow{f_1},\overrightarrow{f_2},\overrightarrow{f_3}\right\}=\{(1,0,0,1),(0,1,2,3),(1,-1,1,-1)\}$
   Troviamo una base ortonormale rispetto al prodotto scalare standard $\langle(x_1,x_2,x_3,x_4),(y_1,y_2,y_3,y_4)\rangle=x_1y_+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4$. Poniamo:

   $$\overrightarrow{v_1}=\overrightarrow{f_1}=(1,0,0,1)$$

   $$\overrightarrow{v_2}=\overrightarrow{f_2}-\frac{\left\langle\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{f_2}\right\rangle}{\langle\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_1}\rangle}\overrightarrow{v_1}=(0,1,2,3)-\frac{3}{2}(1,0,0,1)=(-\frac{3}{2},1,2,\frac{3}{2})$$

   $$\overrightarrow{v_3}=\overrightarrow{f_3}-\frac{\left\langle\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{f_3}\right\rangle}{\langle\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_2}\rangle}\overrightarrow{v_2}-\frac{\left\langle\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{f_3}\right\rangle}{\langle\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_1}\rangle}\overrightarrow{v_1}=(1,-1,1,-1)-(\frac{0}{2})(1,0,0,1)-(-\frac{4}{9})(-\frac{3}{2},1,2,\frac{3}{2})=$$
   $$=(1,1,\frac{3}{2},-2)$$

   Ora poniamo:

   $$\overrightarrow{w_1}=\frac{\overrightarrow{v_1}}{\sqrt{\|\overrightarrow{v_1}\|}}=(\frac{1}{\sqrt{2}},0,0,\frac{1}{\sqrt{2}})$$
   $$\overrightarrow{w_2}=\frac{\overrightarrow{v_2}}{\sqrt{\|\overrightarrow{v_2}\|}}=(-\frac{3}{\sqrt{38}},\sqrt{\frac{2}{19}},2\sqrt{\frac{2}{19}},\frac{3}{38})$$
   $$\overrightarrow{w_3}=\frac{\overrightarrow{v_3}}{\sqrt{\|\overrightarrow{v_3}\|}}=\frac{1}{2\sqrt{323}}(13,-15,27,-13)$$

   Allora $\{\overrightarrow{w_1},\overrightarrow{w_2},\overrightarrow{w_3}\}=\left\{(\frac{1}{\sqrt{2}},0,0,\frac{1}{\sqrt{2}}),(-\frac{3}{\sqrt{38}},\sqrt{\frac{2}{19}},2\sqrt{\frac{2}{19}},\frac{3}{38}),(\frac{13}{2\sqrt{323}},\frac{-15}{2\sqrt{323}},\frac{27}{2\sqrt{323}},\frac{-13}{2\sqrt{323}})\right\}$

   è una base ortonormale del sottospazio generato dai vettori assegnati.

   (b) $\left\{\overrightarrow{f_1},\overrightarrow{f_2},\overrightarrow{f_3},\overrightarrow{f_4}\right\}=\{(-1,0,1,2),(2,0,1,-4),(0,0,3,0),(-3,0,0,6)\}$

   Troviamo una base ortonormale rispetto al prodotto scalare standard $\langle(x_1,x_2,x_3,x_4),(y_1,y_2,y_3,y_4)\rangle=$

$x_1y_+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4$. Notiamo che $f_3=2f_1+f_2$ e che $f_4=f_1-f_2$ quindi la dimensione dello spazio vettoriale generato da questi vettori è due e quindi dobbiamo trovare solo due vettori di norma 1 e ortogonali tra di loro. Poniamo:
$\overrightarrow{v_1}=\overrightarrow{f_1}=(-1,0,1,2)$
$\overrightarrow{v_2}=\overrightarrow{f_2}-\dfrac{\left\langle\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{f_2}\right\rangle}{\langle\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_1}\rangle}\overrightarrow{v_1}=(2,0,1,-4)-(-\dfrac{3}{2})(-1,0,1,2)=(\dfrac{1}{2},0,\dfrac{5}{2},-1)$

Ora poniamo:

$$\overrightarrow{w_1}=\frac{\overrightarrow{v_1}}{\sqrt{\|\overrightarrow{v_1}\|}}=(-\frac{1}{\sqrt{6}},0,\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{3}})$$
$$\overrightarrow{w_2}=\frac{\overrightarrow{v_2}}{\sqrt{\|\overrightarrow{v_2}\|}}=(\frac{1}{\sqrt{30}},0,\sqrt{\frac{5}{6}},\sqrt{\frac{5}{6}})$$

Allora $\{\overrightarrow{w_1},\overrightarrow{w_2}\}=\left\{(-\frac{1}{\sqrt{6}},0,\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{3}}),(\frac{1}{\sqrt{30}},0,\sqrt{\frac{5}{6}},\sqrt{\frac{5}{6}})\right\}$ è una base ortonormale del sottospazio generato dai vettori assegnati.

(c) Notiamo che lo spazio generato dai vettori $\{(1,n,n^2,n^3)\,|\,n\in\mathbb{N}\}$ ha dimensione al più quattro. Pertanto il procedimento di Gram-Schimidt avrà sicuramente termine nel momento in cui troviamo 4 vettori diversi da $\overrightarrow{0}$.
Poniamo:

$$\overrightarrow{v_1}=\overrightarrow{f_1}=(1,0,0,0)$$

Sia ora $n=1\Rightarrow\overrightarrow{f_2}=(1,1,1,1)$

$$\overrightarrow{v_2}=\overrightarrow{f_2}-\frac{\left\langle\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{f_2}\right\rangle}{\langle\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_1}\rangle}\overrightarrow{v_1}=(1,1,1,1)-1(1,0,0,0)=(0,1,1,1)$$

Sia ora $n=2\Rightarrow\overrightarrow{f_3}=(1,2,4,8)$

$$\overrightarrow{v_3}=\overrightarrow{f_3}-\frac{\left\langle\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{f_3}\right\rangle}{\langle\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_2}\rangle}\overrightarrow{v_2}-\frac{\left\langle\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{f_3}\right\rangle}{\langle\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_1}\rangle}\overrightarrow{v_1}=(1,2,4,8)-\frac{14}{3}(0,1,1,1)-1(1,0,0,0)=$$
$$=(0,-\frac{8}{3},-\frac{2}{3},\frac{10}{3})$$

Sia ora $n=3\Rightarrow\overrightarrow{f_4}=(1,3,9,27)$

$$\overrightarrow{v_4}=\overrightarrow{f_4}-\frac{\left\langle\overrightarrow{v_3},\overrightarrow{f_4}\right\rangle}{\langle\overrightarrow{v_3},\overrightarrow{v_3}\rangle}\overrightarrow{v_3}-\frac{\left\langle\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{f_3}\right\rangle}{\langle\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_2}\rangle}\overrightarrow{v_2}-\frac{\left\langle\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{f_3}\right\rangle}{\langle\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_1}\rangle}\overrightarrow{v_1}=(1,3,9,27)-\frac{57}{14}(0,-\frac{8}{3},-\frac{2}{3},\frac{10}{3})-$$
$$-13(0,1,1,1)-1(1,0,0,0)=(0,\frac{6}{7},-\frac{9}{7},\frac{3}{7})$$

Ora poniamo:

$$\overrightarrow{w_1}=\frac{\overrightarrow{v_1}}{\sqrt{\|\overrightarrow{v_1}\|}}=(1,0,0,0)$$
$$\overrightarrow{w_2}=\frac{\overrightarrow{v_2}}{\sqrt{\|\overrightarrow{v_2}\|}}=(0,\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},,\frac{1}{\sqrt{3}})$$
$$\overrightarrow{w_3}=\frac{\overrightarrow{v_3}}{\sqrt{\|\overrightarrow{v_3}\|}}=(0,-2\sqrt{\frac{2}{21}},-\frac{1}{\sqrt{42}},\frac{5}{\sqrt{42}})$$
$$\overrightarrow{w_4}=\frac{\overrightarrow{v_4}}{\sqrt{\|\overrightarrow{v_4}\|}}=(0,-2\sqrt{\frac{2}{7}},-\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{1}{\sqrt{14}})$$

Allora $\{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{w_3}, \overrightarrow{w_4}\} =$
$\left\{(1,0,0,0)), (0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}},, \frac{1}{\sqrt{3}}), (0, -2\sqrt{\frac{2}{21}}, -\frac{1}{\sqrt{42}}, \frac{5}{\sqrt{42}}), (0, -2\sqrt{\frac{2}{7}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}})\right\}$

è una base ortonormale dello spazio generato dai vettori assegnati.

2. Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale e sia b un prodotto scalare su V. Sia W un sottospazio vettoriale di dimensione finita di V. Dimostrare che vale:

$$V = W \oplus W^{\perp}$$

<u>*Soluzione:*</u>

Sia $\dim(W) = t$. Con il medoto di Gram-Schmidt è possibile determinare una base b-ortonormale di W, che denotiamo $\{\overrightarrow{w_1}, \cdots, \overrightarrow{w_t}\}$.
Per dimostrare che $V = W \oplus W^{\perp}$ dobbiamo far vedere che $W \cap W^{\perp} = \{0\}$ e che $W + W^{\perp} = V$.

- Sia $\overrightarrow{x} \in W \cap W^{\perp} \Rightarrow b(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{w}) = 0 \, \forall \, \overrightarrow{w} \in W$. Ma $\overrightarrow{x} \in W \Rightarrow b(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{x} = 0$, essendo b un prodotto scalare e quindi definito positivo.
- Sia $\overrightarrow{v} \in V$. Vogliamo far vedere che $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{a} \in W$ e $\overrightarrow{b} \in W^{\perp}$.
  Consideriamo il vettore $\overrightarrow{v_0} = \sum_{i=1}^{t} b(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}_i)\overrightarrow{w}_i$. Ovviamente $\overrightarrow{v_0} \in W$, perchè è combinazione lineare dei vettori $\overrightarrow{w_i}$.

  Essendo $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_0} + (\overrightarrow{v} - \overrightarrow{v_0})$, per concludere basta verificare che $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{v_0} \in W^{\perp}$. Infatti, per $1 \leq j \leq t$ si ha:
  $$b(\overrightarrow{v} - \overrightarrow{v_0}, \overrightarrow{w_j}) = b(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w_j}) - b(\overrightarrow{v_0}, \overrightarrow{w_j}) = b(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w_j}) - b(\sum_{i=1}^{t} b(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}_i)\overrightarrow{w}_i, \overrightarrow{w_j}) =$$
  $$= b(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w_j}) - \sum_{i=1}^{t} b(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}_i) b(\overrightarrow{w_i}, \overrightarrow{w}_j) = b(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w_j}) - \sum_{i=1}^{t} b(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}_i)\delta_{ij} = b(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w_j}) - b(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w_j}) = 0,$$
  dove δ_{ij} è il cosiddetto *simbolo di Kronecker*, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se}\, i = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

3. Si consideri in $\mathbb{R}^4$ la forma bilineare b così definita:
$$b(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + x_3y_3 + 2x_4y_4, \forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^4.$$
   (a) Verificare che b è un prodotto scalare.
   (b) Trovare una base ortogonale e una base ortonormale per b.
   (c) Trovare una base ortonormale del sottospazio $V = \{(x, y, z, w) | 2x + y - z - w = 0\}$ di $\mathbb{R}^4$. Completare poi la base trovata a base ortonormale di $\mathbb{R}^4$.

<u>*Soluzione:*</u>

(a) La matrice di b rispetto alla base canonica $\mathbb{E}$ è:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Usiamo 2 metodi per dimostrare che b è un prodotto scalare.

- **Metodo 1**
  Usiamo la definizione di prodotto scalare.
  Si vede chiaramente che b è una forma bilineare simmetrica. Resta da verificare che b è definita positiva, cioè che $b(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) \geq 0 \forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3$ e $b(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{x} = 0$

  $b(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 + 2x_4^2 = x_1^2 + x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_2^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 + 2x_4^2 = x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 + x_2^2 + (x_2 + x_3)^2 + 2x_4^2 \geq 0$

  $$b(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$$

- **Metodo 2**
  Una forma bilineare simmetrica è definita positiva se e solo se la sua corrispondente matrice simmetrica è definita positiva.
  Per stabilire se una matrice è definita positiva utilizziamo il seguente teorema:

  <u>Teorema</u>: Una matrice simmetrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ è definita positiva se e solo se tutti i suoi minori principali $D_1 = a_{11}$, $D_2 = det(A(12|12)), \cdots, D_i = det(A(12\cdots i|12\cdots i), \cdots, D_n = det(A)$ sono positivi.

  Nel nostro caso abbiamo:

  $$D_1 = 2 > 0 \ , \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5 > 0 \ , \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 > 0, \quad D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 > 0.$$

  Per il teorema sopracitato, b è un prodotto scalare.

(b) Anche in questo caso, per trovare una base ortogonale (= diagonalizzante) per b, si potrebbe procedere attraverso due metodi diversi. Il primo consiste nella solita diagonalizzazione attraverso il procedimento induttivo utilizzato per le forme bilineari.
Vediamo invece come è possibile trovare una base ortogonale attraverso il metodo di Gram-Schmidt.
A partire dunque dalla base canonica $\mathbb{E} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}\}$, per il teorema di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt, troviamo $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_3}\}$ tali che $\langle\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4}\rangle = \langle\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}\rangle = \mathbb{R}^4$ e $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4}$ sono a due a due ortogonali, cioè $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4}\}$ costituisce una base ortogonale per b.
In particolare, ponendo $\langle\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\rangle := b(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ si ha:

$$\overrightarrow{v_{k+1}} = \overrightarrow{e_{k+1}} - \sum_{m=1, \overrightarrow{v_m} \neq 0}^{4} \frac{\langle\overrightarrow{v_m}, \overrightarrow{e_{k+1}}\rangle}{\langle\overrightarrow{v_m}, \overrightarrow{v_m}\rangle} \overrightarrow{v_m}, \qquad k = 0, 1, 2, 3$$

Quindi:

$$\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v_2} = \vec{e_2} - \frac{\langle \vec{v_1}, \vec{e_2}\rangle}{\langle \vec{v_1}, \vec{v_1}\rangle}\vec{v_1} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{v_3} = \vec{e_3} - \frac{\langle \vec{v_1}, \vec{e_3}\rangle}{\langle \vec{v_1}, \vec{v_1}\rangle}\vec{v_1} - \frac{\langle \vec{v_2}, \vec{e_3}\rangle}{\langle \vec{v_2}, \vec{v_2}\rangle}\vec{v_2} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{0}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{\frac{5}{2}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{5}\\-\frac{2}{5}\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{v_4} = \vec{e_4} - \frac{\langle \vec{v_1}, \vec{e_4}\rangle}{\langle \vec{v_1}, \vec{v_1}\rangle}\vec{v_1} - \frac{\langle \vec{v_2}, \vec{e_4}\rangle}{\langle \vec{v_2}, \vec{v_2}\rangle}\vec{v_2} - \frac{\langle \vec{v_3}, \vec{e_4}\rangle}{\langle \vec{v_3}, \vec{v_3}\rangle}\vec{v_3} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{0}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{0}{\frac{5}{2}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{0}{\frac{3}{5}}\begin{pmatrix}\frac{1}{5}\\-\frac{2}{5}\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

A partire dalla base ortogonale $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4}\}$ si può trovare una base ortonormale normalizzando ciascuno dei vettori $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4}$. Quindi ricordando che $\|\vec{x}\| = \sqrt{b(\vec{x}, \vec{x})}$, si ha che una base ortonormale per b è data da:

$$\left\{\frac{\vec{v_1}}{\|\vec{v_1}\|}, \frac{\vec{v_2}}{\|\vec{v_2}\|}, \frac{\vec{v_3}}{\|\vec{v_3}\|}, \frac{\vec{v_4}}{\|\vec{v_4}\|}\right\} = \left\{\frac{\vec{v_1}}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{2}{5}}\vec{v_2}, \sqrt{\frac{5}{3}}\vec{v_3}, \frac{\vec{v_4}}{\sqrt{2}}\right\} =$$

$$\left\{(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, 0), (-\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{5}{2}}, 0, 0), \left(\frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{3}}, -\frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}}, \sqrt{\frac{5}{3}}, 0\right), \left(0, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}.$$

(c) Il sistema che definisce V ha come soluzioni i vettori $(x, y, z, 2x + y - z)$, con $x, y, z \in \mathbb{R}$ arbitrari. Quindi, $dimV = 3$ e una base di V è $\{(1, 0, 0, 2), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, -1)\}$, cioè $V = \langle(1, 0, 0, 2), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, -1)\rangle$.

Utilizziamo il procedimento di Gram-Schmidt per trovare una base ortogonale del sottospazio V rispetto a b.

Poniamo $v_1 = (1, 0, 0, 2)$, $v_2 = (0, 1, 0, 1)$ e $v_3 = (0, 0, 1, -1)$. Allora:

$$w_1 = v_1 = (1, 0, 0, 2);$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle w_1, v_2\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle}w_1 = (0, 1, 0, 1) - \frac{5}{10}(1, 0, 0, 2) = \left(-\frac{1}{2}, 1, 0, 0\right)$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle w_1, v_3\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle}w_1 - \frac{\langle w_2, v_3\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle}w_2 = (0, 0, 1, -1) - \frac{-4}{10}(1, 0, 0, 2) - \frac{1}{\frac{5}{2}}(-\frac{1}{2}, 1, 0, 0) = \left(\frac{3}{5}, -\frac{2}{5}, 1, -\frac{1}{5}\right)$$

La base ortonormale cercata sarà allora:

$$\{\tilde{w_1}, \tilde{w_2}, \tilde{w_3}\} = \left\{\frac{w_1}{\|w_1\|}, \frac{w_2}{\|w_2\|}, \frac{w_3}{\|w_3\|}\right\} = \left\{\frac{w_1}{\sqrt{10}}, \frac{w_2}{\sqrt{\frac{5}{2}}}, \frac{w_3}{1}\right\} =$$

$$\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, 0, 0, \frac{2}{\sqrt{10}}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}, \sqrt{\frac{2}{5}}, 0, 0\right), \left(\frac{3}{5}, -\frac{2}{5}, 1, -\frac{1}{5}\right)\right\}.$$

Per completare la base trovata a base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ dobbiamo trovare un vettore $\tilde{w_4}$ tale che:

1) $\tilde{w_4} \in \{\tilde{w_1}, \tilde{w_2}, \tilde{w_3}\}^\perp$
2) $\|\tilde{w_4}\| = 1$
3) $\langle\tilde{w_1}, \tilde{w_2}, \tilde{w_3}, \tilde{w_4}\rangle = \mathbb{R}^4$

In realtà sarà sufficiente trovare un vettore soddisfacente 1) e 2). La 3) sarà automaticamente verificata poichè in tal caso $\tilde{w_1}, \tilde{w_2}, \tilde{w_3}, \tilde{w_4}$ costituiscono un insieme di vettori non nulli a due a due ortogonali e pertanto risultano lineramente indipendenti.

Sia $\tilde{w_4} = (x, y, z, t)$

$\tilde{w_4} \in \{\tilde{w_1}, \tilde{w_2}, \tilde{w_3}\}^{\perp} \Rightarrow \tilde{w_4} \in \tilde{w_1}^{\perp} \cap \tilde{w_2}^{\perp} \cap \tilde{w_3}^{\perp} \Rightarrow$:

$$\Rightarrow \begin{cases} \langle \tilde{w_4}, \tilde{w_1} \rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}(2x + y + 4t) \\ \langle \tilde{w_4}, \tilde{w_2} \rangle = \sqrt{\frac{2}{5}}(\frac{5}{2}y + z) \\ \langle \tilde{w_4}, \tilde{w_3} \rangle = \frac{1}{5}(4x + 2y + 3z - 2t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + 4t = 0 \\ \frac{5}{2}y + z = 0 \\ 4x + 2y + 3z - 2t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ z = -\frac{5}{2}x \\ t = -\frac{3}{4}x \end{cases}$$

Il vettore $\overrightarrow{x} = (4, 4, -10, -3)$ verifica il sistema precedente e pertanto è ortogonale contemporaneamente a $\tilde{w_1}$, $\tilde{w_2}$ e $\tilde{w_3}$.
Allora $\tilde{w_4} = \frac{\overrightarrow{x}}{\|\overrightarrow{x}\|} = \left(\frac{2\sqrt{6}}{15}, \frac{2\sqrt{6}}{15}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{10}\right)$ verifica 1), 2) e 3) e pertanto $\{\tilde{w_1}, \tilde{w_2}, \tilde{w_3}, \tilde{w_4}\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$.

4. (a) Dimostrare che in uno spazio vettoriale euclideo $(V, \langle\,,\rangle)$ sussistono le seguenti identità, $\forall\, v, w \in V$:
   i. $\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$
   ii. $\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2 = 4\langle v, w\rangle$.

   (b) Sia V uno spazio vettoriale euclideo con prodotto scalare standard e siano v, $w \in V$. Dimostrare che se $\|v\| = \|w\|$ allora $(v + w)\perp(v - w)$. Interpretare questo risultato geometricamente.

Soluzione:

Ricordiamo che $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} \Rightarrow \|v\|^2 = \langle v, v\rangle$.

(a) i. $\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = \langle v + w, v + w\rangle + \langle v - w, v - w\rangle = \langle v, v\rangle + \langle w, w\rangle + 2\langle v, w\rangle + \langle v, v\rangle + \langle w, w\rangle - 2\langle v, w\rangle = 2\langle v, v\rangle + 2\langle w, w\rangle = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$

ii. $\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2 = \langle v + w, v + w\rangle - \langle v - w, v - w\rangle = \langle v, v\rangle + \langle w, w\rangle + 2\langle v, w\rangle - (\langle v, v\rangle + \langle w, w\rangle - 2\langle v, w\rangle) = 2\langle v, w\rangle + 2\langle v, w\rangle = 4\langle v, w\rangle$

(b) Sia $\|v\| = \|w\| \Rightarrow \|v\|^2 = \|w\|^2$. Allora:
$\langle v + w, v - w\rangle = \langle v, v\rangle - \langle v, w\rangle + \langle w, v\rangle - \langle w, w\rangle = \langle v, v\rangle - \langle w, w\rangle = \|v\|^2 - \|w\|^2 = 0 \Rightarrow (v + w)\perp(v - w)$.

Si può facilmente verificare geometricamente che dati due vettori v e w, la loro somma $v + w$ e la loro differenza $v - w$ sono perpendicolari.

5. Sia $V = \mathbb{R}_3[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado 3 a coefficienti in $\mathbb{R}$, dotato del prodotto scalare standard:

$$\left\langle a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3, b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 \right\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

   (a) Dopo aver verificato che i seguenti polinomi costituiscono una base di V, applicare ad essi il processo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt:

$$t + 1,\ t + t^2,\ 2 - t - t^3,\ t^3$$

   (b) Dato il sottospazio $U = \left\langle t^3 - 1, t + 2\right\rangle$ di V calcolare le equazioni cartesiane e parametriche di $U^{\perp}$. Scrivere poi una base ortonormale di U e di $U^{\perp}$.

Soluzione:

Consideriamo la base $\{1, x, x^2, x^3\}$ di $\mathbb{R}_3[x]$. Sia $\varphi : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita nel modo seguente:

$\varphi(1) = e_1 = (1, 0, 0, 0)$
$\varphi(x) = e_2 = (0, 1, 0, 0)$
$\varphi(x^2) = e_3 = (0, 0, 1, 0)$
$\varphi(x^3) = e_4 = (0, 0, 0, 1)$

φ è un isomorfismo, tramite il quale l'elemento generico $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x]$ corrisponde al vettore di $\mathbb{R}^4$ (a_0, a_1, a_2, a_3) (infatti per linearità $\varphi(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_0\varphi(1) + a_1\varphi(x) + a_2\varphi(x^2) + a_3\varphi(x^3) = a_0e_1 + a_1e_2 + a_2e_3 + a_3e_4 = (a_0, a_1, a_2, a_3)$).
La matrice che rappresenta $\langle\, ,\,\rangle$ rispetto alla base $\{1, x, x^2, x^3\}$ è:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Inoltre vale che:

$$\left\langle a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3, b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 \right\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} I \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

quindi i valori restituiti dal prodotto scalare rimangono invariati se lavoriamo invece che sui polinomi di $\mathbb{R}_3[x]$ sui vettori di $\mathbb{R}^4$ che corrispondono ad essi tramite l'isomorfismo φ.

(a) I polinomi assegnati corrispondono, tramite l'isomorfismo φ, ai vettori $(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (2, -1, 0, -1), (0, 0, 0, 1)$ i quali sono linearmaente indipendenti, in quanto la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ha determinante non nullo. Applichiamo a questi ultimi
il processo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt:

Poniamo $v_1 = (1, 1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1, 0)$, $v_3 = (2, -1, 0, -1)$ e $v_4 = (0, 0, 0, 1)$. Allora:

$w_1 = v_1 = (1, 1, 0, 0)$;
$w_2 = v_2 - \dfrac{\langle w_1, v_2\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 = (0, 1, 1, 0) - \dfrac{1}{2}(1, 1, 0, 0) = \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 1, 0 \right)$
$w_3 = v_3 - \dfrac{\langle w_1, v_3\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 - \dfrac{\langle w_2, v_3\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle} w_2 = (2, -1, 0, -1) - \dfrac{1}{2}(1, 1, 0, 0) - \dfrac{-\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}}(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 1, 0) = \left(1, -1, 1, -1 \right)$
$w_4 = v_4 - \dfrac{\langle w_1, v_4\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 - \dfrac{\langle w_2, v_4\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle} w_2 - \dfrac{\langle w_3, v_4\rangle}{\langle w_3, w_3\rangle} w_3 = (0, 0, 0, 1) - \dfrac{0}{2}(1, 1, 0, 0) -$
$- \dfrac{0}{\frac{3}{2}}(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 1, 0) - \dfrac{-1}{4}(1, -1, 1, -1) = \left(\dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{4} \right)$

La base ortonormale cercata sarà allora:

$$\left\{\frac{w_1}{\|w_1\|},\frac{w_2}{\|w_2\|},\frac{w_3}{\|w_3\|},\frac{w_4}{\|w_4\|}\right\}=\left\{\frac{w_1}{\sqrt{2}},\frac{w_2}{\sqrt{\frac{3}{2}}},\frac{w_3}{2},\frac{w_4}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right\}=$$

$$\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0,0\right),\left(-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6},\sqrt{\frac{2}{3}},0\right),\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\left(\frac{\sqrt{3}}{6},-\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\},$$ che corrisponde tramite φ alla base ortonormale:
$\{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}t,-\frac{\sqrt{6}}{6}+\frac{\sqrt{6}}{6}t+\sqrt{\frac{2}{3}}t^2,\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t^3,\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{\sqrt{3}}{6}t+\frac{\sqrt{3}}{6}t^2+\frac{\sqrt{3}}{2}t^3\}$.

(b) Tramite l'isomorfismo φ, $U=\{(-1,0,0,1),(2,1,0,0)\}\Rightarrow U^\perp=\{(-1,0,0,1)\}^\perp\cap\{(2,1,0,0)\}^\perp$.

$$\begin{cases}(-1,0,0,1)^\perp=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4|-x+t=0\}\\(2,1,0,0)^\perp=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4|2x+y=0\}\end{cases}\Rightarrow U^\perp=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4|-x+t=0\text{ e }2x+y=0\right\}=$$
$$=\{(t,-2t,z,t)|t,z\in\mathbb{R}\}=\langle(0,0,1,0),(1,-2,0,1)\rangle.$$

Notiamo che i vettori $(0,0,1,0),(1,-2,0,1)$ sono ortogonali, pertanto una base ortonormale per $U^\perp$ sarà $\{(0,0,0,1),(\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{2\sqrt{6}}{6},0,\frac{\sqrt{6}}{6})\}$ che corrisponde tramite φ alla base $\{t^3,\frac{\sqrt{6}}{6}-\frac{2\sqrt{6}}{6}t+\frac{\sqrt{6}}{6}t^3\}$.

Applichiamo invece il procedimento di Gram-Schmidt per determinare una base ortonormale per U. Poniamo $u_1=(-1,0,0,1),u_2=(2,1,0,0)$

$w_1=u_1=(-1,0,0,1)$;
$$w_2=u_2-\frac{\langle w_1,u_2\rangle}{\langle w_1,w_1\rangle}w_1=(2,1,0,0)-\frac{-2}{2}(-1,0,0,1)=\Big(1,1,0,1\Big).$$
Per cui una base ortonormale per U è $\{(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,0,\frac{\sqrt{2}}{2}),(\frac{\sqrt{3}}{3},0,\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})\}$ che corrisponde tramite φ alla base $\{-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}t^3,\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}t^2+\frac{\sqrt{3}}{3}t^3\}$.

6. Sia $\mathcal{C}[0,1]$ lo spazio vettoriale delle funzioni continue su $[0,1]$ e sia $\mathbb{R}_n[x]$ il sottospazio di $\mathcal{C}[0,1]$ dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{R}$ di grado minore o uguale a n.

(a) Date $f,g\in\mathcal{C}[0,1]$ mostrare che $\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(x)g(x)dx$ è un prodotto scalare.
(b) Determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}_3[x]$ rispetto al prodotto scalare definito per restrizione da $\langle,\rangle$.

<u>*Soluzione:*</u>

(a) Verifichiamo che $\langle\,,\,\rangle$ è una forma bilineare simmetrica definita positiva:

- Sia $h\in\mathcal{C}[0,1]$ si ha:

  $\langle\lambda f+\mu h,g\rangle=\int_0^1(\lambda f(x)+\mu h(x))g(x)dx=\int_0^1\lambda f(x)g(x)+\mu h(x)g(x)dx=\int_0^1\lambda f(x)g(x)dx+\int_0^1\mu h(x)g(x)dx=\lambda\int_0^1 f(x)g(x)dx+\mu\int_0^1 h(x)g(x)dx=\lambda\langle f,g\rangle+\mu\langle h,g\rangle$;
  nei vari passaggi abbiamo sfruttato la linearità dell'integrale.

  Allo stesso modo si dimostra che $\langle f,\lambda g+\mu h\rangle=\lambda\langle f,g\rangle+\mu\langle f,h\rangle$.
  Ne segue che $\langle\,,\,\rangle$ è una forma bilineare.

- $\langle\,,\,\rangle$ è chiaramente simmetrica essendo $\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(x)g(x)dx=\int_0^1 g(x)f(x)dx=\langle g,f\rangle$.

- $\langle\,,\,\rangle$ è definita positiva: infatti essendo $f(x)^2\geq 0$ per la monotonia (o teorema del confronto) degli integrali si ha:

$\int_0^1 f(x)^2 dx \geq \int_0^1 0 dx = 0 \Rightarrow \langle f, f \rangle \geq 0.$

Inoltre $\langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$: l'implicazione $\Leftarrow$ è banale. Viceversa se per assurdo fosse $f \neq 0$, cioè esistesse $x \in [0,1]$ tale che $f(x) \neq 0$, allora, essendo f continua, esisterebbe $\epsilon > 0$ tale che nell'intorno $I = [x-\epsilon, x+\epsilon] \cap [0,1]$ $f \neq 0$, si avrebbe $\langle f, f \rangle = \int_0^1 f(x)^2 dx \geq \int_I f(x)^2 dx > 0$, contro l'ipotesi che $\langle f, f \rangle = 0$.

$\langle\, , \,\rangle$ è quindi un prodotto scalare

(b) Consideriamo la base $\{1, x, x^2, x^3\}$ di $\mathbb{R}_3[x]$, e poniamo $v_1 = 1$, $v_2 = x$, $v_3 = x^2$ e $v_4 = x^3$. Allora:

$$w_1 = v_1 = 1;$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle w_1, v_2 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 = x - \frac{\int_0^1 x dx}{\int_0^1 1 dx} 1 = x - \frac{\frac{x^2}{2}\Big|_0^1}{x\Big|_0^1} 1 = x - \frac{\frac{1}{2}}{1} 1 = x - \frac{1}{2}$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle w_1, v_3 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle w_2, v_3 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 = x^2 - \frac{\int_0^1 x^2 dx}{\int_0^1 1 dx} 1 - \frac{\int_0^1 x^3 - \frac{1}{2}x^2 dx}{\int_0^1 x^2 - x + \frac{1}{4} dx}(x - \frac{1}{2}) =$$

$$= \frac{\frac{x^3}{3}\Big|_0^1}{x\Big|_0^1} 1 - \frac{[\frac{x^4}{4} - \frac{1}{6}x^3]\Big|_0^1}{[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}x]\Big|_0^1}(x - \frac{1}{2}) = x^2 - \frac{\frac{1}{3}}{1} 1 - \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{6}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}}(x - \frac{1}{2}) = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

$$w_4 = v_4 - \frac{\langle w_1, v_4 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle w_2, v_4 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 - \frac{\langle w_3, v_4 \rangle}{\langle w_3, w_3 \rangle} w_3 = x^3 - \frac{\int_0^1 x^3 dx}{\int_0^1 1 dx} 1 - \frac{\int_0^1 x^4 - \frac{1}{2}x^3 dx}{\int_0^1 x^2 - x + \frac{1}{4} dx}(x - \frac{1}{2}) -$$

$$- \frac{\int_0^1 x^5 - x^4 + \frac{1}{6}x^3 dx}{\int_0^1 x^4 - 2x^3 + \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{36}}(x^2 - x + \frac{1}{6}) = x^3 - \frac{\frac{x^4}{4}\Big|_0^1}{x\Big|_0^1} 1 - \frac{[\frac{x^5}{5} - \frac{1}{8}x^4]\Big|_0^1}{[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}x]\Big|_0^1}(x - \frac{1}{2}) -$$

$$- \frac{[-\frac{x^6}{6} - \frac{x^5}{5} + \frac{1}{24}x^4]\Big|_0^1}{[\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{4}{9}x^3 - \frac{x^2}{6} + \frac{x}{36}]\Big|_0^1}(x^2 - x + \frac{1}{6}) = x^3 - \frac{3}{2} + \frac{3}{5} - \frac{1}{20}$$

Per cui una base ortonormale per $\mathbb{R}_3[x]$ è $\{\frac{w_1}{\|w_1\|}, \frac{w_2}{\|w_2\|}, \frac{w_3}{\|w_3\|}, \frac{w_4}{\|w_4\|}\} =$

$$= \{1, \frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{1}{12}}, \frac{x^2 - x + \frac{1}{6}}{\frac{1}{180}}, \frac{x^3 - \frac{3}{2} + \frac{3}{5} - \frac{1}{20}}{\frac{1}{2800}}\}.$$

7. Sia $\overrightarrow{u} = (-1, 0, 1)$ un vettore di $\mathbb{R}^3$, dotato di prodotto scalare standard. Determinare i vettori ortogonali ad $\overrightarrow{u}$, aventi norma 2 e verificanti una delle due condizioni:

(a) sono complanari con $\overrightarrow{u_1} = (1, 0, 1)$ e $\overrightarrow{u_2} = (0, 1, -1)$;

(b) formano un angolo $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ con $\overrightarrow{u_3} = (-1, 1, 0)$.

Soluzione:

Sia $\overrightarrow{v} = (x, y, z)$ un generico vettore.
Dapprima stabiliamo quali condizioni devono verificare le coordinate di $\overrightarrow{v}$ affinchè quest'ultimo sia ortogonale a $\overrightarrow{u}$ e abbia norma 2:
1) $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{u}^{\perp} \Rightarrow -x + z = 0$
2) $\|\overrightarrow{v}\| = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 4$

(a) Il piano vettoriale $\langle \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2} \rangle$ ha equazione cartesiana:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{cioè } x - y - z = 0.$$

Poichè $\overrightarrow{v}$ è complanare a $\overrightarrow{u_1}$ e $\overrightarrow{u_2}$ si deve avere $\overrightarrow{v} \in \langle \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2} \rangle$, cioé $x - y - z = 0$. Mettendo a sistema questa equazione con quelle ricavate in 1) e 2), otteniamo:

$$\begin{cases} -x+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=2 \\ x-y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=z \\ 2x^2+y^2=2 \\ x-y-x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=z \\ 2x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2} \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_1}=(\sqrt{2},0,\sqrt{2}) \\ \overrightarrow{v_2}=(-\sqrt{2},0,-\sqrt{2}) \end{cases}$$

Pertanto troviamo 2 vettori che soddisfano le condizioni richieste.

(b) Premettiamo innanzitutto che dati due vettori $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^3$ tali che ϑ sia l'angolo tra di essi compreso, il prodotto scalare standard $\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ è definito anche nel modo seguente: $\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle = \| \overrightarrow{x} \| \, \| \overrightarrow{y} \| \, cos\vartheta$.
Verifichiamo l'equivalenza delle due definizioni in $\mathbb{R}^2$:
fissato un riferimento cartesiano Oxy, siano $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2)$, $\overrightarrow{y} = (y_1, y_2)$ e siano ϑ_1, ϑ_2 gli angoli che i vettori $\overrightarrow{x}$ e $\overrightarrow{y}$ formano rispettivamente con la direzione positiva dell'asse delle x. Allora si avrà che $\vartheta = |\vartheta_1 - \vartheta_2|$, dove ϑ è l'angolo compreso tra $\overrightarrow{x}$ e $\overrightarrow{y}$. Inoltre siano $\rho_1 = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)} = \| \overrightarrow{x} \|$ e $\rho_2 = \sqrt{(y_1^2 + y_2^2)} = \| \overrightarrow{y} \|$ le lunghezze rispettivamente dei vettori $\overrightarrow{x}$ e $\overrightarrow{y}$.
Allora dai teoremi sui triangoli rettangoli si ha che: $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2) = (\rho_1 cos\vartheta_1, \rho_1 sen\vartheta_1)$ e $\overrightarrow{y} = (y_1, y_2) = (\rho_2 cos\vartheta_2, \rho_2 sen\vartheta_2)$.
Pertanto:
$\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 = \rho_1 cos\vartheta_1 \rho_2 cos\vartheta_2 + \rho_1 sen\vartheta_1 \rho_2 sen\vartheta_2 = \rho_1\rho_2(cos\vartheta_1 cos\vartheta_2 + sen\vartheta_1 sen\vartheta_2) = \rho_1\rho_2 cos|\vartheta_1 - \vartheta_2| = \| \overrightarrow{x} \| \, \| \overrightarrow{y} \| \, cos\vartheta$.

Torniamo all'esercizio.
Affinchè $\overrightarrow{v} = (x, y, z)$ formi un angolo $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ con $\overrightarrow{u_3}$ si deve avere per quanto appena visto:
$\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u_3} \rangle = \| \overrightarrow{v} \| \, \| \overrightarrow{u_3} \| \, cos\vartheta \Rightarrow \frac{\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u_3} \rangle}{\| \overrightarrow{v} \| \| \overrightarrow{u_3} \|} = cos\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\langle (x,y,z),(-1,1,0) \rangle}{\| \overrightarrow{v} \| \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{-x+y}{\| \overrightarrow{v} \| \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Poichè dalle ipotesi $\| \overrightarrow{v} \| = 2$, allora $\frac{-x+y}{2} = 1$, cioè $y = x + 2$. Ricordando che $z = x$ e $2x^2 + y^2 = 4$, per quanto visto a inizio esercizio, ne segue che $\overrightarrow{v} = (x, x+2, x)$ con $2x^2 + (x+2)^2 = 4$, cioè $3x^2 + 4x = 0$. Pertanto $x = 0$ oppure $x = -\frac{4}{3}$. I vettori richiesti sono dunque ancora due:

$\overrightarrow{v_1} = (0, 2, 0)$ e $\overrightarrow{v_2} = \left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$