Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE210

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. A. Verra
Tutori: Simona Dimase e Annamaria Iezzi

SOLUZIONI TUTORATO NUMERO 4 (28 OTTOBRE 2010)
OPERATORI UNITARI E RIPASSO

1. Sia V uno spazio vettoriale e sia $T : V \to V$ un operatore unitario. Dimostrare che:
   (a) Se T ha autovalori $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, allora gli autospazi V_{λ_1} e V_{λ_2} sono ortogonali tra loro.
   (b) Se $\overrightarrow{v}$ è un autovettore di T risulta:
   $$T(\overrightarrow{v}^{\perp}) \subseteq \overrightarrow{v}^{\perp}.$$

   Soluzione:

   (a) Innanzitutto T è un operatore unitario ovvero tale che
   $$\left\langle T(\overrightarrow{a}), T(\overrightarrow{b}) \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \right\rangle \forall\, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in V$$
   Siano ora $\overrightarrow{u} \in V_{\lambda_1}$ e $\overrightarrow{v} \in V_{\lambda_2} \Rightarrow T(\overrightarrow{u}) = \lambda_1 \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$ e $T(\overrightarrow{v}) = \lambda_2 \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v}$.
   Otteniamo quindi che:

   $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle T(\overrightarrow{u}), T(v) \rangle = \langle \overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v} \rangle = -\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle.$

   Sommando a entrambi i termini dell'uguaglianza $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$ si ottiene:

   $2\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0 \Rightarrow \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0.$

   Pertanto $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ sono ortogonali.
   Da ciò segue che gli autospazi V_{λ_1} e V_{λ_2} sono ortogonali tra loro. Abbiamo,infatti, dimostrato che due qualunque vettori appartenenti rispettivamente al primo e al secondo autospazio risultano essere ortogonali.

   (b) Sia $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{v}^{\perp}$e sia $\lambda \neq 0$ il corrispondente autovalore di $\overrightarrow{v}$ (se λ è un autovalore di un operatore unitario allora $\lambda = \pm 1$), si ha:

   $0 = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle T(\overrightarrow{u}), T(\overrightarrow{v}) \rangle = \langle T(\overrightarrow{u}), \lambda\overrightarrow{v} \rangle = \lambda \langle T(\overrightarrow{u}), \overrightarrow{v} \rangle \overset{\lambda\neq 0}{\Rightarrow} \langle T(\overrightarrow{u}), \overrightarrow{v} \rangle = 0.$

   Abbiamo, dunque, dimostrato che $T(\overrightarrow{u}) \subseteq \overrightarrow{v}^{\perp}$; essendo $\overrightarrow{u}$ arbitrario in $\overrightarrow{v}^{\perp}$ ne concludiamo che $T(\overrightarrow{v}^{\perp}) \subseteq \overrightarrow{v}^{\perp}$.

2. In $\mathbb{R}^2$ è assegnato un prodotto scalare $\langle , \rangle$ definito rispetto ad una base $\mathbb{E}$ dalla matrice
   $$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
   Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, sia $T_\alpha : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'operatore definito (in base $\mathbb{E}$) dalla matrice
   $$\mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ T_α è unitario.

Soluzione:

T_α è unitario $\iff \langle T_\alpha(\overrightarrow{x}), T_\alpha(\overrightarrow{y})\rangle = \langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\rangle \ \forall\, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^2 \iff {}^t(T_\alpha(\overrightarrow{x}))\, \mathbf{C}\, T_\alpha(\overrightarrow{y}) = {}^t\overrightarrow{x}\, \mathbf{C}\, \overrightarrow{y}\ \forall\, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow {}^t\overrightarrow{x}\, {}^t\mathbf{A}_\alpha\, \mathbf{C}\, \mathbf{A}_\alpha \overrightarrow{y} = {}^t\overrightarrow{x}\, \mathbf{C}\, \overrightarrow{y}\ \forall\, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow {}^t\mathbf{A}_\alpha\, \mathbf{C}\, \mathbf{A}_\alpha = \mathbf{C}$.

$${}^t\mathbf{A}_\alpha\, \mathbf{C}\, \mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2\alpha & 2+\alpha \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 2(1+\alpha+\alpha^2) & -1-2\alpha \\ -1-2\alpha & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(1+\alpha+\alpha^2) = 2 \\ -1-2\alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = -1$$

Pertanto l'unico valore per cui T_α è unitario è $\alpha = -1$.

3. Si consideri la forma simmetrica $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la cui forma quadratica associata $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è

$$q(\overrightarrow{v}) = 5x^2 + 2xy - 2xz + y^2 + 4yz + 4z^2, \qquad \overrightarrow{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

   (a) Si determini una base diagonalizzante $\mathcal{B}$. Si determinino rango e segnatura di b.
   (b) Sia $i : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica che, rispetto alla base $\mathcal{B}$, ha come matrice associata la matrice identità. Si determinino i valori di t per i quali $b + ti : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è definita positiva.

(Appello A del 29 gennaio 2010)

Soluzione:

(a) Data una forma quadratica $q = \sum_{1 \le i \le j \le n} q_{ij} X_i X_j$ essa è associata univocamente a una forma bilineare simmetrica F. Sia $A = (a_{ij})$ la matrice simmetrica che rappresenta F nella base canonica. Sia $\overrightarrow{v} = (X_1, \cdots, X_n)$, si deve avere:

$q(\overrightarrow{v}) = F(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v})$.

Inoltre:

$$q(\overrightarrow{v}) = \sum_{1 \le i \le j \le n} q_{ij} X_i X_j = \sum_{1 \le i \le n} q_{ii} X_i^2 + = \sum_{1 \le i < j \le n} q_{ij} X_i X_j;$$
$$F(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) = {}^t\overrightarrow{v} A \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} X_1 & \cdots & X_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij} X_i X_j = \sum_{1 \le i \le n} a_{ii} X_i^2 + \sum_{1 \le i \ne j \le n} a_{ij} X_i X_j =$$
$$\sum_{1 \le i \le n} a_{ii} X_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} 2a_{ij} X_i X_j.$$

Poichè $\{X_i X_j\}_{1 \le i \le j \le n}$ è una base per lo spazio vettoriale dei polinomi omogenei di secondo grado in n indeterminate, da $q(\overrightarrow{v}) = F(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v})$, deve essere: $\begin{cases} a_{ii} = q_{ii} \\ aij = \frac{q_{ij}}{2} \end{cases}$

Veniamo al nostro esercizio.
Per quanto appena osservato la matrice che rappresenta b è:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Determiniamo una base diagonalizzante $\mathcal{B}$.
$\overrightarrow{e_1}$ è un vettore non isotropo essendo $q(\overrightarrow{e_1}) = 5$. Pertanto $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{e_1}$ costituirà il primo vettore della base nostra diagonalizzante:

Allora $\mathbb{R}^3 = \langle \overrightarrow{v_1} \rangle \oplus \overrightarrow{v_1}^\perp$, dove

$\overrightarrow{v_1}^\perp = \left\{ \overrightarrow{w} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | b(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{w}) = 0 \right\}$.

$$b(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{w}) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 5x + y - z = 0$$

Pertanto $\overrightarrow{v_1}^\perp = \left\{ \overrightarrow{w} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 5x + y - z = 0 \right\}$.

$\overrightarrow{v_2} = (0,1,1) \in \overrightarrow{v_1}^\perp$ e $q(\overrightarrow{v_2}) = 9$. Essendo $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ entrambi non isotropi e ortogonali tra loro, essi risulteranno linearmente indipendenti. Pertanto $\overrightarrow{v_2}$ costituirà il secondo vettore della nostra base diagonalizzante e si avrà:
$\mathbb{R}^3 = \langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle \oplus \left\{ \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \right\}^\perp$
A questo punto rimane da trovare $\overrightarrow{v_3} \in \left\{ \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \right\}^\perp = \overrightarrow{v_1}^\perp \cap \overrightarrow{v_2}^\perp$.

$\overrightarrow{v_2}^\perp = \left\{ \overrightarrow{w} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | b(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w}) = 0 \right\}$.

$$b(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w}) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3y + 6z = 0$$

Pertanto $\left\{ \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \right\}^\perp = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\, 5x + y - z = 0 \quad \text{e} \quad 3y + 6z = 0 \right\}$.

$\overrightarrow{v_3} = (3,10,5) \in \left\{ \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \right\}^\perp$ e $q(\overrightarrow{v_3}) = -45$. Essendo $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$ non isotropi e a due a due ortogonali, essi risulteranno linearmente indipendenti. Pertanto $\mathcal{B} = \{ \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3} \}$ è una base diagonalizzante per b.

Poichè $q(\overrightarrow{v_1}) = 5$, $q(\overrightarrow{v_2}) = 9$ e $q(\overrightarrow{v_3}) = -45$, la matrice B che rappresenta b nella base $\mathcal{B}$ avrà la forma:

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -45 \end{pmatrix}$$

Possiamo a questo punto concludere che il rango di b è $r = 3$ e che b ha segnatura $(2,1)$, ricordando che la segnatura è la coppia (p,q) dove, data una base diagonalizzante $\{ \overrightarrow{d_i} \}$ per b, p indica la cardinalità dell'insieme $\{ \overrightarrow{d_i} | b(\overrightarrow{d_i}, \overrightarrow{d_i}) > 0 \}$ e $q = r - p$.

(b) Sia $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice che rappresenta i nella base $\mathcal{B}$.

Allora la matrice C che rappresenta $b + ti$ nella base $\mathcal{B} = \{ \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3} \}$ è $C = B + tI = (b(\overrightarrow{v_i}, \overrightarrow{v_j}) + ti(\overrightarrow{v_i}, \overrightarrow{v_j}))$ (infatti $(b + ti)(\overrightarrow{v_i}, \overrightarrow{v_j}) = b(\overrightarrow{v_i}, \overrightarrow{v_j}) + ti(\overrightarrow{v_i}, \overrightarrow{v_j})$).

$$C = \begin{pmatrix} 5+t & 0 & 0 \\ 0 & 9+t & 0 \\ 0 & 0 & -45+t \end{pmatrix}$$

Pertanto $b + ti$ è definita positiva $\Leftrightarrow$ $C = (c_{ij})$ è definita positiva $\Leftrightarrow$ $c_{ii} > 0 \, \forall \, i \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5 + t > 0 \\ 9 + t > 0 \\ -45 + t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow t > 45.$$

4. Sia $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica la cui matrice associata rispetto alla base canonica $e = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ è

$$\begin{pmatrix} h & -1 & 2 \\ -1 & h & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad h \in \mathbb{R}.$$

(a) Si trovino, se esistono, i valori di $h \in \mathbb{R}$ per cui b è non degenere e quelli per cui è un prodotto scalare.

(b) Per $h = -1$ si stabilisca se può esistere una base di $\mathbb{R}^3$, ortogonale rispetto a b, contenente il vettore $4\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_3}$.

(c) Per $h = 0$ si stabilisca se può esistere una base $f = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$, ortogonale rispetto a b e tale che

$$b(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1}) = 0, \qquad b(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2}) = 1, \qquad b(\overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_3}) = 2.$$

Soluzione:

(a) Sia $A = \begin{pmatrix} h & -1 & 2 \\ -1 & h & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Affinchè A sia non degenere dobbiamo imporre che essa abbia rango massimo ovvero $\det(A) \neq 0$: $\det(A) = -4h \Rightarrow A$ è non degenere $\Leftrightarrow h \neq 0$.

Sappiamo che una forma bilineare simmetrica è definita positiva, ossia è un prodotto scalare, $\Leftrightarrow A$ è definita positiva $\Leftrightarrow$ tutti i minori principali di A sono positivi. Pertanto dobbiamo imporre:

$$D_1 = h > 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} h & -1 \\ -1 & h \end{vmatrix} = h^2 - 1 > 0\ , \quad D_3 = \begin{vmatrix} h & -1 & 2 \\ -1 & h & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4h > 0$$

da cui si otterrebbe il sistema: $\begin{cases} h > 0 \\ h < -1 \vee h > 1 \\ h < 0 \end{cases}$ che chiaramente non è soddisfatto per alcun valore di h.

Ne segue che, per qualsiasi scelta di h, b non è mai un prodotto scalare.

(b) Notiamo innanzitutto che, per i risultati ottenuti nel punto precedente, imponendo $h = -1$ b è non degenere, ossia ha rango $r(b) = 3$.

Osserviamo inoltre che $\overrightarrow{u} = 4\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_3} = (4, 0, 1)$ è un vettore isotropo. Infatti:

$$b(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Questo implica che $\overline{u}$ non può essere contenuto in una base diagonalizzante per b. Infatti se per assurdo lo fosse si avrebbe che b in tale base è rappresentata da una matrice diagonale B avente almeno uno 0 sulla diagonale. Ma una siffatta matrice B ha determinante nullo, cioè $r(B) < 3$, il che implicherebbe che $r(b) < 3$ ($= b$ è degenere): si arriverebbe così a un assurdo in quanto il rango di una forma bilineare non dipende dalla particolare base scelta e dall'osservazione iniziale nel nostro caso si ha $r(b) = 3$.

(c) Innanzitutto per $h = 0$, la matrice associata a b rispetto alla base canonica è:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

In tal caso, inoltre, per quanto visto nel punto (a), b è degenere e in particolare $r = r(b) = 2$.

Ricordiamo che anche la segnatura di una forma bilineare è indipendente dalla base scelta.
Se esistesse quindi una base f tale da soddisfare le ipotesi richieste, b avrebbe segnatura $(p, q = n - r) = (2, 0)$.
Consideriamo il vettore $\overrightarrow{w} = (1, 1, 0)$. Osserviamo che:

$$b(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{w}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2$$

Potremmo quindi procedere con il solito metodo induttivo per diagonalizzare la matrice ponendo $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{w}$ e portando a termine il processo di diagonalizzazione avremmo una matrice del tipo:

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ a \neq 0$$

(*Nota*: Sappiamo che uno e uno solo degli elementi sulla diagonale è nullo perchè, essendo il rango indipendente dalla base scelta, la matrice D deve avere rango 2).
Questo contraddirebbe l'ipotesi che la segnatura della matrice sia $(2, 0)$.

E' quindi impossibile trovare una base, per $h = 0$, tale che le condizioni richieste siano soddisfatte.

5. E' assegnato il polinomio

$$P = x^2 - \overline{3}y^2 + \overline{5}xy - \overline{3}yz \in \mathbb{Z}_7 [x, y, z] .$$

Sia $V = (\mathbb{Z}_7)^3$ e si fissi in V la base $\mathbb{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$.

(a) Scrivere la matrice A della forma quadratica Q associata al polinomio P (in base $\mathbb{E}$) e determinarne il rango.

(b) Diagonalizzare Q e indicarne l'espressione in una base Q-diagonalizzante.

<u>*Soluzione:*</u>

(a) Si osservi che in $\mathbb{Z}_7$ risulta: $-\overline{3} = \overline{4}$ e $\frac{\overline{1}}{\overline{2}} = \overline{4}$. Si ha quindi:

$$P = x^2 - \overline{3}y^2 + \overline{5}xy - \overline{3}yz = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{6} & \overline{0} \\ \overline{6} & \overline{4} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} \end{pmatrix}$$

(matrice di Q in base $\mathbb{E}$).

Poichè $det(A) = -\overline{33} = \overline{2} \neq \overline{0}$, allora $rg(Q) = rg(A) = 3$. Ricordiamo infatti che il rango di una matrice è indipendente dalla base in cui essa viene espressa.

(b) Procediamo con il solito metodo induttivo.
$\overrightarrow{e_1}$ è un vettore non isotropo poichè $Q(\overrightarrow{e_1}) = \overline{1}$. Pertanto $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{e_1}$ costituirà il primo vettore della base nostra diagonalizzante:

Allora $(\mathbb{Z}_7)^3 = \langle\overrightarrow{v_1}\rangle \oplus \overrightarrow{v_1}^{\perp}$, dove

$$\overrightarrow{v_1}^{\perp} = \left\{ (x, y, z) \in (\mathbb{Z}_7)^3 | \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{6} & \overline{0} \\ \overline{6} & \overline{4} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in (\mathbb{Z}_7)^3 | \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{6} & \overline{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} = \{(x,y,z) \in (\mathbb{Z}_7)^3 | x + \overline{6}y = 0\}$$

$\overrightarrow{v_2} = (\overline{1}, \overline{1}, \overline{0}) \in \overrightarrow{v_1}^{\perp}$ e $Q(\overrightarrow{v_2}) = \overline{1} - \overline{3} + \overline{5} = \overline{3}$. Essendo $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ entrambi non isotropi e ortogonali tra loro, essi risulteranno linearmente indipendenti. Pertanto $\overrightarrow{v_2}$ costituirá il secondo vettore della nostra base diagonalizzante e si avrà:

$(\mathbb{Z}_7)^3 = \langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle \oplus \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}^{\perp}$

A questo punto rimane da trovare $\overrightarrow{v_3} \in \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}^{\perp} = \overrightarrow{v_1}^{\perp} \cap \overrightarrow{v_2}^{\perp}$.

$$\overrightarrow{v_2}^{\perp} = \left\{ (x,y,z) \in (\mathbb{Z}_3)^3 | \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} & \overline{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{6} & \overline{0} \\ \overline{6} & \overline{4} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} =$$

$$\left\{ (x,y,z) \in (\mathbb{Z}_7)^3 | \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{3} & \overline{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} = \{(x,y,z) \in (\mathbb{Z}_7)^3 | \overline{3}y + z = 0\}$$

Pertanto $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}^{\perp} = \{(x,y,z) \in (\mathbb{Z}_7)^3 | x + \overline{6}y = 0 \quad \text{e} \quad \overline{3}y + z = 0\}$.

$\overrightarrow{v_3} = (\overline{1}, \overline{1}, \overline{4}) \in \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}^{\perp}$ e $Q(\overrightarrow{v_3}) = \overline{3}$. Essendo $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$ non isotropi e a due a due ortogonali, essi risulteranno linearmente indipendenti. Pertanto $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ é una base diagonalizzante per Q.

Poichè $Q(\overrightarrow{v_1}) = \overline{1}$, $Q(\overrightarrow{v_2}) = \overline{2}$ e $Q(\overrightarrow{v_3}) = \overline{18} = \overline{4}$, la matrice B che rappresenta Q nella base $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ avrà la forma:

$$B = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{3} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{4} \end{pmatrix}$$

per cui l'espressione di Q in tale base sarà:

$$Q(x', y', z') = \begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = (x')^2 + \overline{3}(y')^2 + \overline{4}(z')^2$$

6. Sia $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica tale che $I_b(\mathbb{R}^n) = \{0\}$. Dimostrare, utilizzando il teorema di Sylvester, che risulta:

$$b(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) > 0, \forall \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad \text{oppure} \quad b(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) < 0, \forall \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

[cioè b è definita positiva o definita negativa].

<u>*Soluzione:*</u>

In base al teorema di Sylvester, esiste una base $\mathbb{E} = \{\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ di $\mathbb{R}^n$ in cui la forma bilineare b assume la forma:

$$b(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_r^2$$

con $p \le r \le n$. [La coppia $(p, r-p)$ é la segnatura di b].
Risulta subito che $r = n$, altrimenti $b(\overrightarrow{e_n}, \overrightarrow{e_n}) = 0$ e quindi $\overrightarrow{e_n} \in I_b(\mathbb{R}^n)$, contraddicendo l'ipotesi che $I_b(\mathbb{R}^n) = \{0\}$.
Per concludere basta verificare che $p = n$ oppure che $p = 0$: infatti nel primo caso risulterà che $b(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) > 0 \, \forall \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, mentre nel secondo caso si avrà che $b(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) < 0 \, \forall \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Supponiamo per assurdo che $1 \leq p < n$ e consideriamo l'equazione:

$$x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_n^2 = 0$$

equivalente alla seguente:

$$x_1^2 + \ldots + x_p^2 = x_{p+1}^2 + \cdots + x_n^2$$

Se esiste un vettore non nullo $\overrightarrow{x}$ verificante tale equazione, allora $b(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = 0$, cioè $\overrightarrow{x} \in I_b(\mathbb{R}^n)$ e si avrà dunque un assurdo.

Se $p \geq n - p$, basterà scegliere il vettore $\overrightarrow{x} = \{x_1, \ldots, x_n\} \in \mathbb{R}^n$ avente componenti:
$x_1 = \ldots = x_{n-p} = x_{p+1} = \ldots = x_n = 1$
e le rimaneti (eventuali) tutte nulle;

se invece $p < n - p$, scegliamo il vettore $\overrightarrow{x} = \{x_1, \ldots, x_n\} \in \mathbb{R}^n$ avente componenti:
$x_1 = \ldots = x_p = x_{n-p+1} = \ldots = x_n = 1$
e le rimaneti (eventuali) tutte nulle.

I vettori considerati verificano l'equazione precedente e forniscono quindi un assurdo.

7. Sia $a : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare così definita rispetto alla base canonica $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}\}$:

$$a(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2}, \qquad a(\overrightarrow{e_2}) = 2\overrightarrow{e_1} + 5\overrightarrow{e_2}$$
$$a(\overrightarrow{e_3}) = 4\overrightarrow{e_3} + 2\overrightarrow{e_4}, \qquad a(\overrightarrow{e_4}) = 2\overrightarrow{e_3} + 2\overrightarrow{e_4}$$

(a) Verificare che a è un operatore simmetrico rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$ (*Nota*: dato uno spazio vettoriale euclideo V con prodotto scalare $\langle\, , \rangle$, un operatore $T \in \mathrm{End}V$ si dice *simmetrico* se $\langle T(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{y}\rangle = \langle \overrightarrow{x}, T(\overrightarrow{y})\rangle$, $\forall\, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in V$).

(b) Determinare rango e segnatura della forma bilineare simmetrica $b : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ così definita:

$$b(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \langle a(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{y}\rangle$$

dove $\langle\, , \rangle$ indica il prodotto scalare standard.

(c) Scrivere l'espressione canonica (o di Sylvester) di b, determinando una base rispetto in cui b si scrive in forma canonica.

<u>*Soluzione:*</u>

(a) Sia A la matrice che rappresenta l'operatore lineare $a : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ nella base canonica. Si ha:

$$\begin{cases} a(\overrightarrow{e_1}) = (1, 2, 0, 0) \\ a(\overrightarrow{e_2}) = (2, 5, 0, 0) \\ a(\overrightarrow{e_3}) = (0, 0, 4, 2) \\ a(\overrightarrow{e_4}) = (0, 0, 2, 2) \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Sia C la matrice che rappresenta il prodotto scalare standard nella base canonica di $\mathbb{R}^4 \Rightarrow C = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a è simmetrico (o autoaggiunto) $\Longleftrightarrow \langle a(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{y}\rangle = \langle \overrightarrow{x}, a(\overrightarrow{y})\rangle \ \forall\, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow {}^t(a(\overrightarrow{x}))\, I\, \overrightarrow{y} = {}^t\overrightarrow{x}\, I\, a(\overrightarrow{y}) \,\forall\, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow {}^t\overrightarrow{x}\, {}^tA\, I\, \overrightarrow{y} = {}^t\overrightarrow{x}\, I\, A \overrightarrow{y} \,\forall\, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow {}^tA\, I = I\, A \Leftrightarrow {}^tA = A \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ A è simmetrica.

La matrice A è simmetrica e pertanto l'operatore a è simmetrico.

(b) Sia b la forma bilineare così definita: $b(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \langle a(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{y} \rangle$.

Notiamo innanzi tutto che b è simmetrica essendo $b(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \langle a(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{y} \rangle \overset{(a)}{=} \langle \overrightarrow{x}, a(\overrightarrow{y}) \rangle = \langle a(\overrightarrow{y}), \overrightarrow{x} \rangle = b(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{x})$.

Sia $\mathbb{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4})$, la matrice $A = (a_{ij})$ che rappresenta b nella base $\mathbb{E}$ è tale che $a_{ij} = b(e_i, e_j)$. Inoltre, essendo b simmetrica, si ha $a_{ij} = a_{ji}$. Per cui basterà determinare a_{ij}, $i \leq j$:

$$\left.\begin{array}{l}
a_{11} = \langle a(\overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_1} \rangle = {}^t(A(\overrightarrow{e_1}))\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \\
a_{12} = \langle a(\overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_2} \rangle = {}^t(A(\overrightarrow{e_1}))\overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \\
a_{13} = \langle a(\overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_3} \rangle = {}^t(A(\overrightarrow{e_1}))\overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\
a_{14} = \langle a(\overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_4} \rangle = {}^t(A(\overrightarrow{e_1}))\overrightarrow{e_4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\
a_{22} = \langle a(\overrightarrow{e_2}), \overrightarrow{e_2} \rangle = {}^t(A(\overrightarrow{e_2}))\overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 5 \\
a_{23} = \langle a(\overrightarrow{e_2}), \overrightarrow{e_3} \rangle = {}^t(A(\overrightarrow{e_2}))\overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\
a_{24} = \langle a(\overrightarrow{e_2}), \overrightarrow{e_4} \rangle = {}^t(A(\overrightarrow{e_2}))\overrightarrow{e_4} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\
a_{33} = \langle a(\overrightarrow{e_3}), \overrightarrow{e_3} \rangle = {}^t(A(\overrightarrow{e_3}))\overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 4 \\
a_{34} = \langle a(\overrightarrow{e_3}), \overrightarrow{e_4} \rangle = {}^t(A(\overrightarrow{e_3}))\overrightarrow{e_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \\
a_{44} = \langle a(\overrightarrow{e_4}), \overrightarrow{e_4} \rangle = {}^t(A(\overrightarrow{e_4}))\overrightarrow{e_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2
\end{array}\right\} \Rightarrow \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Determiniamo una base diagonalizzante per b.

$\overrightarrow{e_1}$ è un vettore non isotropo essendo $b(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1}) = 1$. Pertanto $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{e_1}$ costituirà il primo vettore della base nostra diagonalizzante:

Allora $\mathbb{R}^4 = \langle \overrightarrow{v_1} \rangle \oplus \overrightarrow{v_1}^{\perp}$, dove

$\overrightarrow{v_1}^{\perp} = \left\{ \overrightarrow{w} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | b(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{w}) = 0 \right\}$.

$$b(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{w}) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = x + 2y = 0$$

Pertanto $\overrightarrow{v_1}^{\perp} = \left\{ \overrightarrow{w} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x + 2y = 0 \right\}$.

$\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{e_3} = (0, 0, 1, 0) \in \overrightarrow{v_1}^{\perp}$ e $b(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2}) = 4$. Essendo $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ entrambi non isotropi e ortogonali tra loro, essi risulteranno linearmente indipendenti. Pertanto $\overrightarrow{v_2}$ costituirà il secondo vettore della nostra base diagonalizzante e si avrà:

$\mathbb{R}^3 = \langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle \oplus \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}^{\perp}$

Determiniamo $\overrightarrow{v_3} \in \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}^{\perp} = \overrightarrow{v_1}^{\perp} \cap \overrightarrow{v_2}^{\perp}$.

$\overrightarrow{v_2}^{\perp} = \left\{ \overrightarrow{w} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | b(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w}) = 0 \right\}$.

$$b(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w}) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 4z + 2t = 0$$

Pertanto $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}^{\perp} = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^3 |, x + 2y = 0 \quad \text{e} \quad 4z + 2t = 0 \right\}$.

$\overrightarrow{v_3} = (-2, 1, 1, -2) \in \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}^{\perp}$ e $b(\overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_3}) = 5$. Essendo $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$ non isotropi e a due a due ortogonali, essi risulteranno linearmente indipendenti. Pertanto $\overrightarrow{v_3}$ costituirà il terzo vettore della nostra base diagonalizzante e si avrà:

$\mathbb{R}^4 = \langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3} \rangle \oplus \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}^{\perp}$

A questo punto rimane da trovare $\overrightarrow{v_4} \in \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}^{\perp} = \overrightarrow{v_1}^{\perp} \cap \overrightarrow{v_2}^{\perp} \cap \overrightarrow{v_3}^{\perp}$.

$\overrightarrow{v_3}^{\perp} = \left\{ \overrightarrow{w} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | b(\overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{w}) = 0 \right\}$.

$$b(\overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{w}) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = y - 2t = 0$$

Pertanto $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}^{\perp} = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | \; 5x + y - z = 0 \quad \text{e} \quad 3y + 6z = 0 \quad \text{e} \quad y - 2t = 0 \right\}$.

$\overrightarrow{v_4} = (8, -4, 1, -2) \in \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}^{\perp}$ e $b(\overrightarrow{v_4}, \overrightarrow{v_4}) = 20$. Essendo $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4}$ non isotropi e a due a due ortogonali, essi risulteranno linearmente indipendenti. Pertanto $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4}\}$ è una base diagonalizzante per b.

Essendo $b(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1}) = 1$, $b(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2}) = 4$, $b(\overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_3}) = 5$ e $b(\overrightarrow{v_4}, \overrightarrow{v_4}) = 20$, la matrice B che rappresenta b nella base $\mathcal{B}$ avrà la forma:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

Possiamo a questo punto concludere che il rango di b è 4 e che b ha segnatura $(4,0)$, cioè b è un prodotto scalare.

(c) Sia Q la forma quadratica associata a b, $(Q(\overrightarrow{v}) = b(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}))$. Essendo la segnatura $(4,0)$, dato $\overrightarrow{v} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, l'espressione canonica di Q è la seguente: $Q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$. Una base in cui Q assume tale forma, cioè una base in cui la matrice che rappresenta b è la matrice identità, è data da: $\{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{w_3}, \overrightarrow{w_4}\}$ dove $\overrightarrow{w_i} = \frac{\overrightarrow{v_i}}{\sqrt{|Q(\overrightarrow{v_i})|}}$.
Infatti in tal caso si avrà:

Se $i \neq j$, $b(\overrightarrow{w_i}, \overrightarrow{w_j}) = \frac{1}{\sqrt{|Q(\overrightarrow{v_i})|}\sqrt{|Q(\overrightarrow{v_j})|}} b(\overrightarrow{v_i}, \overrightarrow{v_j}) = 0$ essendo $\overrightarrow{v_i}, \overrightarrow{v_j}$ ortogonali per $i \neq j$.

$b(\overrightarrow{w_i}, \overrightarrow{w_i}) = \frac{1}{\sqrt{|Q(\overrightarrow{v_i})|}^2} b(\overrightarrow{v_i}, \overrightarrow{v_i}) \overset{Q(\overrightarrow{v_i})>0}{=} \frac{1}{Q(\overrightarrow{v_i})} Q(\overrightarrow{v_i}) = 1.$

8. Si determinino, scrivendone la matrice associata rispetto alla base canonica $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$, tutte le forme bilineari simmetriche

$$F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

soddisfacenti alle condizioni seguenti:

(a) $\overrightarrow{e_1}$ e $\overrightarrow{e_2}$ sono vettori isotropi;

(b) Lo spazio ortogonale di $\overrightarrow{v} = (1, 1, 1)$ rispetto a F è il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$.

Al variare di F si determini:

- una base diagonalizzante per F e se ne deducano segnatura e rango.
- Due vettori linearmente indipendenti $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ e che generano un sottospazio sul quale F è definita positiva.
- Una base diagonalizzante contenente il vettore $\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{v}$.

(Prova di esonero del 5-11-2007)

Soluzione:

- Sia A la matrice associata alla forma bilineare F rispetto alla base canonica. Innanzitutto poichè F è simmetrica, A sarà della forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Inoltre:

(a) $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ sono isotropi $\Rightarrow F(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_1}) = F(\overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_2}) = 0 \Rightarrow a_{11} = a_{22} = 0$
Ponendo dunque $a = a_{12}, b = a_{13}, c = a_{23}, d = a_{33}$, la matrice A diventa:

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & d \end{pmatrix}$$

(b) $\overrightarrow{v}^\perp = \langle \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2} \rangle$.

- **Primo metodo**

  Troviamo un'equazione cartesiana per $\overrightarrow{v}^\perp$ e per $\langle \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2} \rangle$.

  - $\overrightarrow{v}^\perp = \left\{ \overrightarrow{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | F(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{v}) = 0 \right\}$
    Pertanto un'equazione cartesiana di $\overrightarrow{v}^\perp$ è data da:

    $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (a+b)x + (a+c)y + (b+c+d)z = 0$$

  - Un'equazione cartesiana per il sottospazio $\langle \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2} \rangle$ è invece data da $z = 0$ (quest'ultima poteva essere anche ricavata notando che il sottospazio $\langle \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2} \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$ rappresenta geometricamente il piano generato dai vettori $(1,0,0)$ e $(0,1,0)$ e passante per il punto $(0,0,0)$ la cui equazione cartesiana è data da:

    $$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow z = 0)$$

  A questo punto, affinchè le due equazioni cartesiane definiscano il medesimo sottospazio di dimensione 2, si dovrà avere:

  $$\begin{cases} a+b=0 \\ a+c=0 \\ b+c+d \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-a \\ c=-a \\ d \neq 2a \end{cases}$$

- **Secondo metodo**
  Basta imporre che $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2} \in \overrightarrow{v}^\perp$ e $\overrightarrow{e_3} \notin \overrightarrow{v}^\perp$. Verifichiamo che sotto queste condizioni si ha: $\langle \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2} \rangle = \overrightarrow{v}^\perp$.

  ($\subseteq$) Se $\overrightarrow{x} \in \langle \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2} \rangle \Rightarrow \overrightarrow{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} \Rightarrow F(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{v}) = F(x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{v}) = x_1F(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{v}) + x_2F(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{v}) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{x} \in \overrightarrow{v}^\perp$.

  ($\supseteq$) Se $\overrightarrow{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + x_3\overrightarrow{e_3} \in \overrightarrow{v}^\perp \Rightarrow F(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{v}) = 0 \Rightarrow F(x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + x_3\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{v}) = 0 \Rightarrow x_1F(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{v}) + x_2F(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{v}) + x_3F(\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{v}) = 0 \Rightarrow x_3F(\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{v}) = 0 \Rightarrow x_3 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} \Rightarrow \overrightarrow{x} \in \langle \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2} \rangle$.

  Dunque imponendo:

  $$\begin{cases} F(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{v}) = 0 \\ F(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{v}) = 0 \\ F(\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{v}) \neq 0 \end{cases}$$

  otteniamo nuovamente il sistema:

  $$\begin{cases} a+b=0 \\ a+c=0 \\ b+c+d \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-a \\ c=-a \\ d \neq 2a \end{cases}$$

In definitiva la matrice A diventa:

$$\begin{pmatrix} 0 & a & -a \\ a & 0 & -a \\ -a & -a & d \end{pmatrix}$$

Escludiamo il caso in cui $a = d = 0$, perchè in tal caso F è la forma bilineare nulla.
Per trovare una base diagonalizzante per F, al variare di a e d, distinguiamo per prima cosa il caso in cui F sia degenere e il caso in cui non lo sia.

$det(A) = 2a^3 - a^2 d = a^2(2a - d) \Rightarrow det(A) = 0$ se e solo se $a = 0$ (ricordiamo che $d \neq 2a$ per quanto visto prima).

$\underline{a = 0}$
In questo caso A diventa

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

A è già in forma diagonale; pertanto $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ rappresenta una base diagonalizzante per F.
Inoltre $r(F) = r(A) = 1$ e la segnatura è $(1, 0)$ se $d > 0$ e $(0, 1)$ se $d < 0$.

$\underline{a \neq 0}$
In questo caso, poichè $det(A) \neq 0$, F è non degenere e quindi $r(F) = 3$.

Diagonalizziamo F, procedendo con il solito metodo induttivo.
$\overrightarrow{e_1}$ e $\overrightarrow{e_2}$ sono vettori isotropi tali che $F(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) = a \neq 0$. Quindi $\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} = (1, 1, 0)$ è un vettore sicuramente non isotropo. Pertanto $\overrightarrow{v_1} = (1, 1, 0)$ costituirà il primo vettore della base nostra diagonalizzante:

Allora $\mathbb{R}^3 = \langle \overrightarrow{v_1} \rangle \oplus \overrightarrow{v_1}^{\perp}$, dove $\overrightarrow{v_1}^{\perp} = \big\{ \overrightarrow{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | F(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{x}) = 0 \big\}$.

$F(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{x}) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & -a \\ a & 0 & -a \\ -a & -a & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & a & -2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$
$ax + ay - 2az = 0 \overset{a \neq 0}{\Rightarrow} x + y - 2z = 0$

Pertanto $\overrightarrow{v_1}^{\perp} = \big\{ \overrightarrow{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - 2z = 0 \big\}$.

$\overrightarrow{v_2} = (1, -1, 0) \in \overrightarrow{v_1}^{\perp}$ e $F(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & -a \\ a & 0 & -a \\ -a & -a & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2a \neq 0$

Essendo $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ entrambi non isotropi e ortogonali tra loro, essi risulteranno linearmente indipendenti. Pertanto $\overrightarrow{v_2}$ costituirà il secondo vettore della nostra base diagonalizzante e si avrà:
$\mathbb{R}^3 = \langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle \oplus \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}^{\perp}$.
A questo punto rimane da trovare $\overrightarrow{v_3} \in \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}^{\perp} = \overrightarrow{v_1}^{\perp} \cap \overrightarrow{v_2}^{\perp}$.

$\overrightarrow{v_2}^{\perp} = \big\{ \overrightarrow{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | F(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{x}) = 0 \big\}$

$F(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{x}) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & -a \\ a & 0 & -a \\ -a & -a & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -a & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$
$-ax + ay = 0 \overset{a \neq 0}{\Rightarrow} -x + y = 0$

Pertanto $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}^{\perp} = \big\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - 2z = 0 \quad \text{e} \quad -x + y = 0 \big\}$.

$\overrightarrow{v_3} = (1, 1, 1) \in \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}^{\perp}$ e $F(\overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_3}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & -a \\ a & 0 & -a \\ -a & -a & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2a + d \neq$
0

Essendo $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$ non isotropi e a due a due ortogonali, essi risulteranno linearmente indipendenti. Pertanto $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\} = \{(1,1,0),(1,-1,0),(1,1,1)\}$ rappresenta una base diagonalizzante per ogni F non degenere.

Sia B la matrice che rappresenta F in questa base. Allora detta P la matrice del cambiamento di base dalla base $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ alla base $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si ha $B = {}^tPAP = \begin{pmatrix} 2a & 0 & 0 \\ 0 & -2a & 0 \\ 0 & 0 & -2a+d \end{pmatrix}$

Possiamo ora determinare la segnatura di F al variare di a e d. Notiamo innanzitutto che la segnatura è del tipo $(1,2)$ o $(2,1)$ poichè $2a$ e $-2a$ sono opposti e $a \neq 0$. Quindi la segnatura è $(1,2)$ se $-2a+d<0$, cioè $d<2a$; altrimenti, se $d>2a$, la segnatura è $(2,1)$.

- Riesco a trovare due vettori linearmente indipendenti $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ che generano un sottospazio sul quale F è definita positiva se e solo se l'indice di positività p è ≥ 2.
  In tal caso se $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ è una base diagonalizzante per F esistono $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ tali che ad esempio $F(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1}) = \lambda_1$ e $F(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2}) = \lambda_2$.
  Allora se poniamo $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ verificano la condizione richiesta.
  Verifichiamo che sul sottospazio $\left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \right\rangle$ F è definita positiva, cioè che $\forall\, \overrightarrow{x} \in \left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \right\rangle$ $F(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) > 0$, se $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$.
  Infatti se $\overrightarrow{x} \in \left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \right\rangle \Rightarrow \overrightarrow{x} = x_1\overrightarrow{a} + x_2\overrightarrow{b} \Rightarrow F(x_1\overrightarrow{a} + x_2\overrightarrow{b}, x_1\overrightarrow{a} + x_2\overrightarrow{b}) = x_1^2F(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}) + x_2^2F(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{b}) + 2x_1x_2F(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = x_1^2F(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}) + x_2^2F(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{b}) = x_1^2\lambda_1 + x_2^2\lambda_2 > 0$ se $x_1, x_2 \neq 0$, cioè se $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$ (nel penultimo passagio si è utilizzato il fatto che $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ sono ortogonali in quanto fanno parte di una base diagonalizzante).

  Nel nostro caso allora due siffatti vettori $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ esistono solo per $d > 2a$ e $a \neq 0$.
  Se $a > 0$, prendiamo ad esempio $\overrightarrow{a} = (1,1,0)$ e $\overrightarrow{b} = (1,1,1)$.
  Altrimenti se $a < 0$ prendiamo $\overrightarrow{a} = (1,-1,0)$ e $\overrightarrow{b} = (1,1,1)$.

- Poniamo $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{v} = (2,2,1)$.

$$F(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{w}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & -a \\ a & 0 & -a \\ -a & -a & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = d$$

  Osserviamo quindi che se $d = 0$ $\overrightarrow{w}$ è un vettore isotropo. In tal caso quindi $\overrightarrow{w}$ non può far parte di una base diagonalizzante, a meno che F non sia degenere, cioè a meno che a non sia 0; ma se $a = d = 0$ F è la forma bilineare nulla e in tal caso ogni terna di vettori lineramente indipendenti costituisce una base diagonalizzante; quindi per $a = d = 0$ una base diagonalizzante contenente il vettore $\overline{w}$ è data ad esempio da $\{\overrightarrow{w}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$.

  Supponiamo quindi $d \neq 0$.

  Per $a = 0$, una base diagonalizzante contenente il vettore $\overrightarrow{w}$ è data da $\{\overrightarrow{w}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ (questo si può verificare facilmente ripetendo il solito metodo induttivo in cui sia stato scelto $\overrightarrow{w}$ come primo vettore e notando che, avendo il tal caso la matrice A rango 1, una base diagonalizzante per F conterrà esattamente 2 vettori isotropi).

Mettiamoci ora nel caso in cui anche $a \neq 0$.
Per trovare una base diagonalizzante contenente il vettore $\overrightarrow{w}$, ripetiamo il solito metodo induttivo scegliendo ora $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{w}$, in modo tale che esso rappresenti il primo vettore della base diagonalizzante che andremo a costruirci.

Allora $\mathbb{R}^3 = \langle \overrightarrow{v_1} \rangle \oplus \overrightarrow{v_1}^{\perp}$, dove $\overrightarrow{v_1}^{\perp} = \{\overrightarrow{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | F(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{x}) = 0\}$.

$$F(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{x}) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & -a \\ a & 0 & -a \\ -a & -a & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & a & -4a+d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$
$ax + ay + (-4a+d)z = 0$

Pertanto $\overrightarrow{v_1}^{\perp} = \{\overrightarrow{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | ax + ay + (-4a+d)z = 0\}$.

$$\overrightarrow{v_2} = (1,-1,0) \in \overrightarrow{v_1}^{\perp} \text{ e } F(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & -a \\ a & 0 & -a \\ -a & -a & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2a \neq 0$$

Essendo $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ entrambi non isotropi e ortogonali tra loro, essi risulteranno linearmente indipendenti. Pertanto $\overrightarrow{v_2}$ costituirà il secondo vettore della nostra base diagonalizzante e si avrà:
$\mathbb{R}^3 = \langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle \oplus \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}^{\perp}$.
A questo punto rimane da trovare $\overrightarrow{v_3} \in \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}^{\perp} = \overrightarrow{v_1}^{\perp} \cap \overrightarrow{v_2}^{\perp}$.

$\overrightarrow{v_2}^{\perp} = \{\overrightarrow{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | F(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{x}) = 0\}$

$$F(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{x}) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & -a \\ a & 0 & -a \\ -a & -a & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -a & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$
$-ax + ay = 0 \overset{a \neq 0}{\Rightarrow} -x + y = 0$

Pertanto $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{_2}\}^{\perp} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | ax + ay + (-4a+d)z = 0 \quad \text{e} \quad -x + y = 0\}$.

Risolviamo quindi il sistema:

$$\begin{cases} ax + ay + (-4a+d)z = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2ax + (-4a+d)z = 0 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{(4a-d)}{2a} z \\ y = x \end{cases}$$

$\overrightarrow{v_3} = (4a-d, 4a-d, 2a) \in \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}^{\perp}$ e
$$F(\overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_3}) = \begin{pmatrix} 4a-d & 4a-d & 2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & -a \\ a & 0 & -a \\ -a & -a & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4a-d \\ 4a-d \\ 2a \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -2a^2 + a(4a-d) & -2a^2 + a(4a-d) & -2a(4a-d) + 2ad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4a-d \\ 4a-d \\ 2a \end{pmatrix} =$$
$= 2ad(d-2a) \neq 0$ poichè siamo nel caso $d \neq 0 \neq a$, mentre $d \neq 2a$ per ipotesi.
Essendo $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$ non isotropi e a due a due ortogonali, essi risulteranno linearmente indipendenti. Pertanto:

$\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\} = \{(2,2,1), (1,-1,0), (4a-d, 4a-d, 2a)\}$

rappresenta una base diagonalizzante contenente $\overrightarrow{w} = (2,2,1)$.