Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE210

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. A. Verra

Tutori: Simona Dimase e Annamaria Iezzi

Soluzioni tutorato numero 7 (3 Dicembre 2010)
Coniche

1. Fissati i punti $P_1 = (0,0), P_2 = (-1,1) \in \mathbb{R}^2$, si scriva l'equazione

$$d(P, P_1)^2 - td(P, P_2)^2 = 0,$$

ove P è il punto generale di cooridinate (x, y), $d(-,-)$ indica la distanza tra i punti e $t \in \mathbb{R}$.

(a) Verificare che per $t \neq 1$ essa rappresenta l'equazione di una conica affine. Per $t \neq 1$, dire quali sono le coniche degeneri.

(b) Per $t = 2$, si scriva l'equazione della conica corrispondente e l'equazione della sua trasformata rispetto alla riflessione attorno all'asse $x + y = 0$.

(Appello A del 29-01-2010)

Soluzione:

(a) Ricordiamo che dati $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2), \overrightarrow{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$d(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Abbiamo quindi che l'equazione cercata è:

$$d(P, P_1)^2 - td(P, P_2)^2 = (\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2})^2 - t(\sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2})^2 =$$
$$= x^2 + y^2 - t(x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1) = (1-t)x^2 + (1-t)y^2 - 2tx + 2ty - 2t = 0.$$

Dall'equazione ottenuta si verifica facilmente che l'unico valore di t che annulla contemporaneamente i termini di secondo grado è 1.
Pertanto $\mathcal{C}_t : (1-t)x^2 + (1-t)y^2 - 2tx + 2ty - 2t = 0$ per $t \neq 1$ rappresenta una conica affine.

La matrice associata a $\mathcal{C}_t$ è:

$$A_t = \begin{pmatrix} -2t & -t & t \\ -t & 1-t & 0 \\ t & 0 & 1-t \end{pmatrix}$$

Determiniamo per quali valori di $t \neq 1$ si hanno coniche degeneri:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -2t & -t & t \\ -t & 1-t & 0 \\ t & 0 & 1-t \end{vmatrix} = -2t + 2t^2 = 2(-1+t)t = 0.$$

Da cui segue che l'unico valore di t per cui si hanno coniche degeneri è 0 (avevamo già escluso precedentemente il caso $t = 1$).

(b) Per $t = 2$ l'equazione della conica è:

$$\mathcal{C} : -x^2 - y^2 + 4y - 4x - 4 = 0.$$

Determiniamo le equazioni della riflessione ρ_r rispetto all'asse $r : x + y = 0$.
Osserviamo che r forma un angolo $\vartheta = \frac{3}{4}\pi$ con la direzione positiva dell'asse delle x,

per cui le equazioni di ρ_r saranno: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos2\vartheta & sin2\vartheta \\ sin2\vartheta & -cos2\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$
Imponendo quindi che $O = (0,0) \in r$ è un punto fisso, si ottiene $p = 0 = q$.
In conclusione ρ_r ha equazioni:

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x = -y' \\ y = -x' \end{cases} \tag{1}$$

A questo punto per trovare l'equazione della conica $\mathcal{D} = \rho_r(\mathcal{C})$ sostituiamo (1) nell'equazione di $\mathcal{C} : -x^2 - y^2 + 4y - 4x - 4 = 0$ e otteniamo:

$$\mathcal{D} : -{x'}^2 - {y'}^2 - 4x' + 4y' - 4.$$

2. Nel piano euclideo $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ si considerino la famiglia di coniche di equazione

$$\mathcal{F} : x^2 + y^2 + txy - tx - 3x + y = 0, t \in \mathbb{R}$$

e la retta $\mathcal{R}$ di equazione $x + y - 1 = 0$.

(a) Si dimostri che la retta $\mathcal{R}$ è asse di simmetria di tutte le coniche della famiglia.

(b) Si determinino le coniche degeneri della famiglia $\mathcal{F}$.

(c) Fra le coniche della famiglia $\mathcal{F}$, si dimostri che ne esiste una e una sola passante per $C = (2, -1)$ e se ne determinino le equazioni in forma cartesiana e in forma canonica.

(Appello B del 18-02-2010)

Soluzione:

(a) Sia $\mathcal{C}_t : x^2 + y^2 + txy - tx - 3x + y = 0$.

Osserviamo che $\mathcal{R}$ sarà asse di simmetria di tutte le coniche della famiglia se $\rho_{\mathcal{R}}(\mathcal{C}_t) = \mathcal{C}_t, \forall\, t \in \mathbb{R}$.
Determiniamo le equazioni della riflessione di asse la retta $\mathcal{R}$.
Partendo dall'equazione generale di una riflessione:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

imponiamo che siano fissati due punti di $\mathcal{R}$, ad esempio $P_1 = (0,1)$ e $P_2 = (1,0)$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

da cui ricaviamo: $\begin{cases} b + e = 0 \\ -a + f = 1 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

da cui ricaviamo: $\begin{cases} a + e = 1 \\ b + f = 0 \end{cases}$
Mettendo a sistema le condizioni trovate si ha:

$$\begin{cases} b+e=0 \\ -a+f=1 \\ a+e=1 \\ b+f=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-e \\ a=f-1 \\ f-1+e=1 \\ -e+f=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-1 \\ 2e=2 \\ a=0 \\ e=f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-1 \\ e=1 \\ a=0 \\ e=1 \end{cases}$$

Pertanto la riflessione cercata è:

$$\begin{pmatrix} x^{'} \\ y^{'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ricaviamo quindi che $\begin{cases} x^{'} = -y+1 \\ y^{'} = -x+1 \end{cases}$, da cui esplicitando x e y si ottiene: $\begin{cases} y = 1-x^{'} \\ x = 1-y^{'} \end{cases}$.

Dunque, sostituendo le espressioni di x e y nell'equazione del fascio di coniche otteniamo che $\rho_{\mathcal{R}}(\mathcal{C}_t)$ ha equazione:

$(1-y')^2 + (1-x')^2 + t(1-y')(1-x') - (t+3)(1-y') + 1 - x' =$

$= 1 + y'^2 - 2y' + 1 + x'^2 - 2x' + t + tx'y' - ty' - tx' - ty' - t + ty' - 3 + 3y' + 1 - x' =$

$= x'^2 + y'^2 + tx'y' - tx' - 3x' + y' = 0.$

Essendo quest'ultima proporzionale all'equazione di $\mathcal{C}_t$, si ha $\rho_{\mathcal{R}}(\mathcal{C}_t) = \mathcal{C}_t$.

(b) La matrice associata a $\mathcal{C}_t$ è:

$$A_t = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{(t+3)}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{(t+3)}{2} & 1 & \frac{t}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{t}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Cerchiamo i valori di t per cui si ha det(A)=0

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{(t+3)}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{(t+3)}{2} & 1 & \frac{t}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{t}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{(t+3)}{2} \begin{vmatrix} -\frac{(t+3)}{2} & \frac{t}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -\frac{(t+3)}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{t}{2} \end{vmatrix} =$$

$= (\frac{t+3}{2})(-\frac{3}{2} - \frac{3t}{4}) + \frac{1}{2}(-\frac{1}{2} - \frac{3t}{4} - \frac{t^2}{4}) = -\frac{5}{2} - \frac{9t}{4} - \frac{t^2}{2}.$

Si ottiene quindi che $t_1 = -\frac{5}{2}$e $t_2 = -2$ sono gli unici valori per cui si hanno coniche degeneri.

(c) Determiniamo t tale che $C = (2,-1)$ soddisfi l'equazione di $\mathcal{C}_t : x^2 + y^2 + txy - tx - 3x + y = 0$:

$4 + 1 - 2t - 2t - 6 - 1 = 0 \Rightarrow -4t = -2 \Rightarrow t = \frac{1}{2}.$

Pertanto la conica cercata è $\mathcal{C}_{\frac{1}{2}} = x^2 + y^2 + \frac{1}{2}xy - \frac{7}{2}x + y = 0$, la cui matrice associata è:

$$A_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{7}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{7}{4} & 1 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \text{con} \quad A_{00\,\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

Poichè $\det(A_{\frac{1}{2}}) = -\frac{11}{4}$ e $\det(A_{00\,\frac{1}{2}}) = \frac{15}{16} > 0$, $\mathcal{C}_{\frac{1}{2}}$ è un'ellisse non degenere. Inoltre essendo il minore principale $D_1 = 0$, $A_{\frac{1}{2}}$ non è né definita negativa, né definita positiva, da cui avrà segnatura $(2,1)$ o $(1,2)$. Ne segue che $\mathcal{C}_{\frac{1}{2}}$ è un'ellisse non degenere a punti reali e pertanto avrà forma canonica corrispondente:

$$X^2 + Y^2 = 1.$$

3. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ si consideri la conica Γ_t di equazione

$$t^2x^2 + t^2y^2 - 2txy + 2(1+t)x - 3 = 0$$

(a) Si determinino le coordinate del centro C_t di Γ_t al variare di t e si scriva l'equazione cartesiana della conica $\mathcal{C}$ su cui giacciono i punti dell'insieme $I = \{C_t, t \in \mathbb{R}\}$.

(b) Si studi la conica $\mathcal{C}$ determinando il tipo, se è degenere o non degenere, gli eventuali centro ed assi.

(c) Si determinino le equazioni di una affinità che trasforma $\mathcal{C}$ in una iperbole equilatera di centro l'origine.

<u>*Soluzione:*</u>

(a) La matrice associata alla conica è:

$$A_t = \begin{pmatrix} -3 & -1-t & 0 \\ -1-t & t^2 & t \\ 0 & t & t^2 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad A_{00t} = \begin{pmatrix} t^2 & t \\ t & t^2 \end{pmatrix}$$

Per prima cosa determiano i valori di t per cui Γ_t è a centro:

$\det(A_{00t}) = t^4 - t^2 = t^2(t^2-1) = t^2(t+1)(t-1) \neq 0 \Leftrightarrow t \neq 0, \pm 1$.
Determiniamo quindi per $t \neq 0, \pm 1$ le coordinate del centro $C_t = (x_t, y_t)$, soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} -1-t+t^2x+ty = 0 \\ tx + t^2y = 0 \end{cases} \overset{t\neq 0}{\Rightarrow} \begin{cases} -1-t-t^3y+ty = 0 \\ x = -ty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-t^3+t)y = 1+t \\ x = -ty \end{cases} \overset{t\neq 0,\pm 1}{\Rightarrow}$$

$$\overset{t\neq 0,\pm 1}{\Rightarrow} \begin{cases} y = \frac{1+t}{(-t^3+t)} = -\frac{1}{t(t-1)} \\ x = -ty = \frac{1}{t-1} \end{cases} \Rightarrow C_t = \left(\tfrac{1}{t-1}, -\tfrac{1}{t(t-1)}\right)$$

Ne segue che le coordinate di C_t risolvono le equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{t-1} \\ y = -\frac{1}{t(t-1)} \end{cases}$$

Eliminando il parametro t, ricaviamo da quest'ultime l'equazione cartesiana, osservando che $x \neq 0 \, \forall t \in \mathbb{R}$ e che, essendo $t \neq 0, \pm 1$, $x \neq -1, -\frac{1}{2}$; in particolare dalla seconda equazione ricaviamo:

$x = \frac{1}{t-1} \Rightarrow (t-1)x = 1 \overset{x\neq 0}{\Rightarrow} t = \frac{1+x}{x}$

Sostituendo dunque l'espressione di t in funzione di x nella prima equazione, si ottiene:

$y = -\frac{1}{t(t-1)} = -\frac{x^2}{1+x} \Rightarrow (1+x)y = -x^2 \Rightarrow x^2 + xy + y = 0.$

Sia $\mathcal{C}$ la conica di equazione $x^2 + xy + y = 0$.
Verifichiamo che effettivamente $C_t \in \mathcal{C} \, \forall t \in \mathbb{R}$:

$$\left(\frac{1}{t-1}\right)^2 + \left(\frac{1}{t-1}\right)\left(-\frac{1}{t(t-1)}\right) - \frac{1}{t(t-1)} = \frac{1}{(t-1)^2} - \frac{1}{t(t-1)^2} - \frac{1}{t(t-1)} = \frac{t-1-t+1}{t(t-1)^2} = 0.$$

Pertanto $\mathcal{C} : x^2 + xy + y = 0$ è la conica cercata.

(b) La matrice associata alla conica $\mathcal{C}$ è:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad A_{00} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$\det(A) = -\frac{1}{4}$;

$\det(A_{00}) = -\frac{1}{4}$.

Ne segue che $\mathcal{C}$ è un'iperbole non degenere.

Determiniamo centro e assi di simmetria.

- **Centro di simmetria**
  Le coordinate (x_0, y_0) del centro di simmetria P_0 sono le soluzioni del seguente sistema:

  $$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

  Pertanto il centro di simmetria è il punto $P_0 = (-1, 2)$.

- **Assi di simmetria**
  Gli assi di simmetria di $\mathcal{C}$ sono le rette s e t passanti per il centro di simmetria e aventi direzione data dai due autovettori associati agli autovalori di A_{00}.

  $$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{2}),\ \lambda_2 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{2})$$

  Gli autospazi corrispondenti sono $V_{\lambda_1} = \langle(1+\sqrt{2}, 1)\rangle$ e $V_{\lambda_2} = \langle(1-\sqrt{2}, 1)\rangle$; pertanto $v_1 = (1+\sqrt{2}, 1)$ e $v_2 = (1-\sqrt{2}, 1)$ sono due autovettori relativi rispettivamente a λ_1 e λ_2.
  Le rette s e t hanno allora equazioni:

  $$s : \begin{vmatrix} x+1 & y-2 \\ 1+\sqrt{2} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - (1+\sqrt{2})y + 3 + 2\sqrt{2} = 0$$
  $$t : \begin{vmatrix} x+1 & y-2 \\ 1-\sqrt{2} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - (1-\sqrt{2})y + 3 - 2\sqrt{2} = 0$$

(c) Un'iperbole si dice *equilatera* se gli asintoti sono perpendicolari.
Un'iperbole equilatera di centro l'origine sarà quindi ad esempio:

$$\mathcal{D} : xy = 1$$

Sia $\mathcal{C}' = \mathcal{D}' = X^2 - Y^2 - 1 = 0$ la forma canonica affinemente equivalente a $\mathcal{C}$ e a $\mathcal{D}$ e siano f e g le affinità tali che $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}' = \mathcal{D}' = g(\mathcal{D})$.
Allora un'affinità h tale che $h(\mathcal{C}) = \mathcal{D}$ sarà data da $h = g^{-1} \circ f$.

Determiniamo f con il metodo di riduzione a forma canonica.

- **Passo 1: Eliminazione del termine misto** $2a_{12}xy$

  $$A_{00} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

  Essendo A_{00} simmetrica, è possibile trovare una matrice $M \in GL_2(\mathbb{R})$ tale ${}^tMA_{00}M$ sia diagonale.

  Diagonalizziamo A_{00} con il metodo induttivo:

  Sia F la forma bilineare associata a A_{00}.

$\overrightarrow{e_1} = (1,0)$ è un vettore non isotropo essendo $F(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1}) = 1$. Pertanto $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{e_1}$ costituirà il primo vettore della base nostra diagonalizzante:

Allora $\mathbb{R}^2 = \langle \overrightarrow{v_1} \rangle \oplus \overrightarrow{v_1}^{\perp}$, dove

$\overrightarrow{v_1}^{\perp} = \left\{ \overrightarrow{w} = (x,y) \in \mathbb{R}^2 | F(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{w}) = 0 \right\}$.

$$F(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{w}) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + \frac{1}{2}y = 0$$

Pertanto $\overrightarrow{v_1}^{\perp} = \left\{ \overrightarrow{w} = (x,y) \in \mathbb{R}^2 | x + \frac{1}{2}y = 0 \right\}$.

$\overrightarrow{v_2} = (-1,2) \in \overrightarrow{v_1}^{\perp}$ e $F(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2}) = 1$. Essendo $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ entrambi non isotropi e ortogonali tra loro, essi risulteranno linearmente indipendenti. Pertanto $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ è una base diagonalizzante per F e quindi per A_{00}.

La matrice M cercata è dunque la matrice del cambiamento di base dalla base $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ alla base $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e se (x,y) e (x',y') sono le coordinate rispettivamente nella base $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ e nella base $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ si ha:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

In questo modo è definita un'affinità f_1 di equazioni:

$$\begin{cases} x = x' - y' \\ y = 2y' \end{cases}$$

Per trovare l'equazione della conica $\mathcal{C}_1 = f_1(\mathcal{C})$ affinemente equivalente a $\mathcal{C}$ tramite l'affinità f_1 sostituiamo nell'equazione di $\mathcal{C} : x^2 + xy + y = 0$, al posto della x e della y, le nuove espressioni in funzione di x' e y' date da f_1:

$$(x' - y')^2 + (x' - y')2y' + 2y' = 0 \Rightarrow \mathcal{C}_1 : (x')^2 - (y')^2 + 2y' = 0$$

- **Passo 2: Eliminazione dei termini di primo grado**

  A partire dall'equazione di $\mathcal{C}_1$, applichiamo il metodo del raccoglimento dei quadrati:

  $$(x')^2 - (y')^2 + 2y' = 0 \Rightarrow (x')^2 - (y')^2 + 2y' - 1 + 1 = 0 \Rightarrow (x')^2 - (y'-1)^2 + 1 = 0$$

  Quindi se applichiamo a $\mathcal{C}_1$ la traslazione f_2:

  $$\begin{cases} x'' = x' \\ y'' = y' - 1 \end{cases}$$

  si ottiene la conica $\mathcal{C}_2 = f_2(\mathcal{C}_1)$ affinemente equivalente a $\mathcal{C}_1$ di equazione:

  $$\mathcal{C}_2 : (x'')^2 - (y'')^2 + 1 = 0$$

  Per ottenere l'equazione della forma canonica $\mathcal{C}' : X^2 - Y^2 = 1$ affinemente equivalente a $\mathcal{C}$ rimane un'ultima trasformazione (f_3) da applicare, quella definita dalle seguenti equazioni:

  $$\begin{cases} x'' = Y \\ y'' = X \end{cases}$$

Ricapitolando, nei vari passi abbiamo applicato a $\mathcal{C}$ le affinità f_1, f_2 e f_3, definite dalle seguenti equazioni:

$$f_1 : \begin{cases} x = x' - y' \\ y = 2y' \end{cases} \qquad f_2 : \begin{cases} x'' = x' \\ y'' = y' - 1 \end{cases} \qquad f_3 : \begin{cases} x'' = Y \\ y'' = X \end{cases}$$

Si ha:

$$\mathcal{C}' = f_3(\mathcal{C}_2) = f_3(f_2(\mathcal{C}_1)) = f_3(f_2(f_1(\mathcal{C}))) \Rightarrow \mathcal{C}' = f_3 \circ f_2 \circ f_1((\mathcal{C})).$$

Sia $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$, allora $\mathcal{C}' = f(\mathcal{C})$; determiniamo le equazioni di f componendo f_1, f_2 e f_3:

$$\begin{cases} x = x' - y' \\ y = 2y' \end{cases} \overset{f_2}{\Rightarrow} \begin{cases} x = x'' - y'' - 1 \\ y = 2y'' + 2 \end{cases} \overset{f_3}{\Rightarrow} \begin{cases} x = Y - X - 1 \\ y = 2X + 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

da cui f ha equazioni:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

<u>Determiniamo ora g con il metodo di riduzione a forma canonica.</u>

- **Passo 1: Eliminazione del termine misto** $2a_{12}xy$

$$B_{00} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Essendo B_{00} simmetrica, è possibile trovare una matrice $M \in GL_2(\mathbb{R})$ tale ${}^tMA_{00}M$ sia diagonale.

Diagonalizziamo B_{00} con il metodo induttivo:

Sia G la forma bilineare associata a B_{00}.
$\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} = (1,1)$ è un vettore non isotropo essendo $G(\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}) = 1$. Pertanto $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$ costituirà il primo vettore della nostra base diagonalizzante:

Allora $\mathbb{R}^2 = \langle \overrightarrow{v_1} \rangle \oplus \overrightarrow{v_1}^{\perp}$, dove

$\overrightarrow{v_1}^{\perp} = \left\{ \overrightarrow{w} = (x,y) \in \mathbb{R}^2 | G(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{w}) = 0 \right\}.$

$$G(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{w}) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 0$$

Pertanto $\overrightarrow{v_1}^{\perp} = \left\{ \overrightarrow{w} = (x,y) \in \mathbb{R}^2 | x + y = 0 \right\}.$

$\overrightarrow{v_2} = (-1,1) \in \overrightarrow{v_1}^{\perp}$ e $G(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2}) = -1$. Essendo $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ entrambi non isotropi e ortogonali tra loro, essi risulteranno linearmente indipendenti. Pertanto $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ è una base diagonalizzante per G e quindi per B_{00}.
La matrice M cercata è dunque la matrice del cambiamento di base dalla base $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ alla base $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e se (x, y) e (X, Y) sono le coordinate rispettivamente nella base $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ e nella base $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ si ha:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

In questo modo è definita un'affinità g di equazioni:

$$\begin{cases} x = X - Y \\ y = X + Y \end{cases} \tag{2}$$

Per trovare l'equazione della conica $\mathcal{D}_1 = g(\mathcal{D})$ affinemente equivalente a $\mathcal{D}$ tramite l'affinità g, sostituiamo nell'equazione di $\mathcal{D} : xy - 1 = 0$, al posto della x e della y, le nuove espressioni in funzione di X e Y date da g:

$(X - Y)(X + Y) - 1 = 0 \Rightarrow \mathcal{D}' = \mathcal{D}_1 : X^2 - Y^2 - 1 = 0$

che è l'equazione della forma canonica affinemente equivalente a $\mathcal{D}$.

Da (2) inoltre ricaviamo che g^{-1} ha equazioni:

$$g^{-1}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

In definitiva un'affinità h tale che $h(\mathcal{C}) = \mathcal{D}$, data da $g^{-1} \circ f$, ha equazioni:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = g^{-1}\left(f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)\right) = g^{-1}\left(\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4. Assegnata la parabola euclidea $\mathcal{C}$ di equazione:

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + 4y = 0,$$

determinare l'asse e il vertice.
(*Suggerimento*: l'asse della parabola ha direzione parallela all'autovettore associato all'autovalore 0 della matrice A_{00}.)

<u>*Soluzione:*</u>

La matrice associata alla conica è:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad A_{00} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Essendo $det(A_{00}) = 0$, uno dei due autovalori di A_{00} è certamente 0. Un autovettore relativo all'autovalore 0 è $\overrightarrow{u} = (-2, 1)$.
Sappiamo che l'asse della parabola ha direzione parallela a $\overrightarrow{u}$. Consideriamo pertanto il fascio $\mathcal{F}$ di rette parallele a $\overrightarrow{u}$;

Posto $r_c : \begin{vmatrix} x & y \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + c = x + 2y + c = 0$, si ha $\mathcal{F} = \{r_c |\, c \in \mathbb{R}\}$.

L'asse della parabola è l'unica retta r di $\mathcal{F}$ tale che $\rho_r(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.

Per prima cosa troviamo quindi le equazioni di ρ_{r_c}. Nell'equazione generale di una riflessione:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

imponiamo che 2 punti distinti della retta r_c siano fissati da ρ_{r_c}:
$P_1 = (2-c, -1)$ e $P_2 = (0, -\frac{c}{2})$.

$$\begin{pmatrix} 2-c \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-c \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (2-c)a - b + p = 2-c \\ (2-c)b + a + q = -1 \end{cases}$$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{c}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{c}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{c}{2}b + p = 0 \\ \frac{c}{2}a + q = -\frac{c}{2} \end{cases}$$

Risolvendo quindi il seguente sistema:

$$\begin{cases} (2-c)a - b + p = 2-c \\ (2-c)b + a + q = -1 \\ -\frac{c}{2}b + p = 0 \\ \frac{c}{2}a + q = -\frac{c}{2} \end{cases}$$

si ottiene $a = \frac{3}{5}$, $b = -\frac{4}{5}$, $p = -\frac{2c}{5}$, $q = -\frac{4c}{5}$, cioè $\rho_{r_c} = \rho_{r_c}^{-1}$ ha equazioni:

$$\begin{cases} x' = \frac{3x-4y-2c}{5} \\ y' = \frac{-4x-3y-4c}{5} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{3x'-4y'-2c}{5} \\ y = \frac{-4x'-3y'-4c}{5} \end{cases}$$

Operando tale sostituzione nell'equazione di $\mathcal{C}$ otteniamo la conica $\rho_{r_c}(\mathcal{C})$ di equazione:

$$(\tfrac{3x'-4y'-2c}{5})^2 + 4(\tfrac{3x'-4y'-2c}{5})(\tfrac{-4x'-3y'-4c}{5}) + 4(\tfrac{-4x'-3y'-4c}{5})^2 + 4(\tfrac{-4x'-3y'-4c}{5}) = 0 \Rightarrow$$

$$(x')^2 + (4c - \tfrac{16}{5})x' + 4x'y' + 4(y')^2 + (8c - \tfrac{12}{5})y' + 4c^2 - \tfrac{16}{5}c = 0$$

Affinchè $\rho_{r_c}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$, imponiamo che le equazioni di $\mathcal{C}$ e $\rho_{r_c}(\mathcal{C})$ siano proporzionali, ovvero che esista $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che:

$$\begin{cases} 4(c - \frac{4}{5}) = 0 \cdot \alpha = 0 \\ 8c - \frac{12}{5} = 4\alpha \\ 4c^2 - \frac{16}{5}c = 0 \cdot \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow c = \frac{4}{5}.$$

Pertanto l'asse di simmetria di $\mathcal{C}$ è la retta

$$r : x + 2y + \frac{4}{5} = 0$$

Il vertice di $\mathcal{C}$ è il punto $V = r \cap C$. Le coordinate di $V = (x, y)$ verificano quindi il sistema:

$$\begin{cases} (x+2y)^2 + 4y = 0 \\ x + 2y = -\frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-\frac{4}{5})^2 + 4y = 0 \\ x + 2y = -\frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{4}{25} \Rightarrow x = -\frac{12}{25} \Rightarrow V = \left(-\frac{4}{25}, -\frac{12}{25}\right).$$

5. Studiare la riducibilità in $\mathbb{R}[x, y]$ e $\mathbb{C}[x, y]$ dei seguenti polinomi:

   (a) $-2x^2 - 4y^2 + 3xy + 4x - 1$;

   (b) $x^2 + 4y^2 + 4xy + 9$;

   (c) $2x^2 - 3y^2 + 5xy - 7x + 7y - 4$.

Soluzione:

Sia $f(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$ un polinomio di secondo grado nelle indeterminate x e y e sia $\mathcal{C}$ la conica di equazione $f(x,y) = 0$. Vale che:

- $f(x,y)$ è riducibile in $\mathbb{C}[x,y] \Leftrightarrow \mathcal{C} \in \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ è degenere.

  Dimostrazione:

  ($\Rightarrow$): Supponiamo $f(x,y)$ riducibile in $\mathbb{C}[x,y] \Rightarrow f(x,y) = (ax+by+c)(dx+ey+f) = adx^2 + bey^2 + (ae+bd)xy + (cd+af)x + (ce+bf)y + cf$, $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{C}$.
  Ne segue che $\mathcal{C}$ ha equazione:

  $$adx^2 + bey^2 + (ae+bd)xy + (cd+af)x + (ce+bf)y + cf = 0$$

  Consideriamo la matrice associata alla conica:

  $$A = \begin{pmatrix} cf & \frac{cd+af}{2} & \frac{ce+bf}{2} \\ \frac{ce+bf}{2} & ad & \frac{ae+bd}{2} \\ \frac{ce+bf}{2} & \frac{ae+bd}{2} & be \end{pmatrix}$$

  Si ha $\det A = 0 \Rightarrow \mathcal{C}$ degenere.

  ($\Leftarrow$): Supponiamo che $\mathcal{C}$ sia una conica degenere.
  Allora esiste un'affinità f di equazioni

  $$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

  che manda $\mathcal{C}$ nella forma canonica $\mathcal{D}$ ad essa affinemente equivalente. Essendo $\mathcal{C}$ degenere, $\mathcal{D}$ dovrà essere necessariamente una tra le seguenti:

  (i) $X^2 + Y^2 = 0 \Rightarrow (X+iY)(X-iY) = 0$
  (ii) $Y^2 - 1 = 0 \Rightarrow (Y+1)(Y-1) = 0$
  (iii) $Y^2 = 0 \Rightarrow (Y)^2 = 0$

  da cui, risalendo all'equazione di $\mathcal{C}$ attraverso l'affinità f, si ottiene

  (i) $f(x,y) = ((ax+by+e) + i(cx+dy+f))((ax+by+e) - i(cx+dy+f)) = 0 \Rightarrow$
  $f(x,y) = ((a+ic)x + (b+id)y + e + if)((a-ic)x + (b-id)y + e - if) = 0$
  (ii) $f(x,y) = (cx+dy+f+1)(cx+dy+f-1) = 0$
  (iii) $f(x,y) = (cx+dy+f)^2 = 0$

  Ne segue che in ogni caso $f(x,y)$ è riducibile in $\mathbb{C}[x,y]$.

- Se $f(x,y)$ è riducibile in $\mathbb{R}[x,y] \Rightarrow \mathcal{C}$ è degenere.

  Dimostrazione:
  La dimostrazione è analoga all'implicazione ($\Rightarrow$) del caso precedente.
  Tuttavia il viceversa non vale poichè ad esempio il polinomio $f(x,y) = y^2 + 1$ non è riducibile, mentre la conica di equazione $f(x,y) = 0$ è degenere.

Utilizziamo questa osservazione per risolvere l'esercizio.

(a) Sia $\mathcal{C}_1$ la conica di equazione

$$-2x^2 - 4y^2 + 3xy + 4x - 1 = 0.$$

Consideriamo la matrice associata alla conica:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -4 \end{pmatrix}$$

Si ha $\det A_1 = \frac{41}{4} \neq 0 \Rightarrow \mathcal{C}_1$ è non degenere $\Rightarrow f(x,y)$ è irriducibile sia in $\mathbb{C}[x,y]$ che in $\mathbb{R}[x,y]$.

(b) Sia $\mathcal{C}_2$ la conica di equazione

$$x^2 + 4y^2 + 4xy + 9 = 0.$$

Consideriamo la matrice associata alla conica:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Si ha $\det A_2 = 0 \Rightarrow \mathcal{C}_2$ è degenere $\Rightarrow f(x,y)$ è riducibile in $\mathbb{C}[x,y]$ (niente per ora si può dire in $\mathbb{R}[x,y]$).

Osserviamo che:

$$x^2 + 4y^2 + 4xy + 9 = (x+2y)^2 + 3^2 = (x+2y+3i)(x+2y-3i).$$

Vediamo che $x^2 + 4y^2 + 4xy + 9$ è irriducibile in $\mathbb{R}[x,y]$. Se per assurdo fosse riducibile allora $x^2 + 4y^2 + 4xy + 9 = (ax+by+c)(dx+ey+f)$, $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}$. Ma allora $f(x,y)$ avrebbe in $\mathbb{C}[x,y]$ due fattorizzazioni distinte in elementi irriducibili e questo è impossibile poichè $\mathbb{C}[x,y]$ è un UFD (dominio a fattorizzazione unica)(infatti $\mathbb{C}$ è un campo $\Rightarrow \mathbb{C}$ è UFD $\Rightarrow \mathbb{C}[x]$ è UFD $\Rightarrow \mathbb{C}[x][y] = \mathbb{C}[x,y]$ è UFD).

(c) Sia $\mathcal{C}_3$ la conica di equazione

$$2x^2 - 3y^2 + 5xy - 7x + 7y - 4 = 0.$$

Consideriamo la matrice associata alla conica:

$$A_3 = \begin{pmatrix} -4 & -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} \\ -\frac{7}{2} & 2 & \frac{5}{2} \\ \frac{7}{2} & \frac{5}{2} & -3 \end{pmatrix}$$

Si ha $\det A_3 = 0 \Rightarrow \mathcal{C}_3$ è degenere $\Rightarrow f(x,y)$ è riducibile in $\mathbb{C}[x,y]$ (niente per ora si può dire in $\mathbb{R}[x,y]$).

Troviamo la fattorizzazione di $f(x,y)$ in $\mathbb{C}[x,y]$, determinando $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{C}$ tali che: $2x^2 - 3y^2 + 5xy - 7x + 7y - 4 = (ax+by+c)(dx+ey+f) = adx^2 + bey^2 + (ae + bd)xy + (cd+af)x + (ce+bf)y + cf$.

Ciò equivale a risolvere il sistema:

$$\begin{cases} ad = 2 \\ be = -3 \\ ae + bd = 5 \\ cd + af = -7 \\ ce + bf = 7 \\ cf = -4 \end{cases}$$

Non è limitativo supporre $a = 1$. Il sistema ammette allora 2 soluzioni:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = -4 \\ d = 2 \\ e = -1 \\ f = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{2} \\ d = 2 \\ e = 6 \\ f = -8 \end{cases}$$

che corrispondono alle due fattorizzazioni (i cui fattori irriducibili sono tra loro associati):

$$2x^2 - 3y^2 + 5xy - 7x + 7y - 4 = (x + 3y - 4)(2x - y + 1) = (x - \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2})(2x + 6y - 8) \ .$$

Ne concludiamo che $f(x, y)$ è riducibile sia in $\mathbb{C}[x, y]$ che in $\mathbb{R}[x, y]$.