**Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica**

# Tutorato di GE210

**A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. A. Verra**

**Tutori: Simona Dimase e Annamaria Iezzi**

SOLUZIONI TUTORATO NUMERO 8 (10 DICEMBRE 2010)
CONICHE E PROIETTIVITÀ

1. Siano $V$ uno spazio vettoriale euclideo e $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ una sua base ortonormale. Si consideri l'operatore lineare $f : V \to V$ così definito:

$$f(\overrightarrow{i}) = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}, \qquad f(\overrightarrow{j}) = 2(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}), \qquad f(\overrightarrow{k}) = 3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 5\overrightarrow{k}$$

(a) Si verifichi che $f$ è autoggiunto e si determini una base ortonormale diagonalizzante di autovettori di $f$.

(b) Sia $I \subseteq V$ il sottoinsieme dei vettori $\overrightarrow{v} \in V$ tali che $\overrightarrow{v}$ e $f(\overrightarrow{v})$ hanno la stessa lunghezza. Si dica, motivando la risposta, se $I$ contiene dei sottospazi vettoriali di dimensione 1 di $V$.

*Soluzione:*

(a) Sia $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ e sia $\langle\, , \rangle : V \times V \to V$ il prodotto scalare su $V$.
Scriviamo la matrice $A$ che rappresenta $f$ rispetto alla base $\mathcal{B}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Ricordiamo che $f$ è un operatore autoaggiunto se e solo se rispetto a una base ortonormale si rappresenta con una matrice simmetrica.

Nel nostro caso $A$ è la matrice che rappresenta $f$ nella base ortonormale $\mathcal{B}$. Essendo $A$ simmetrica ne concludiamo che $f$ è autoaggiunto.

Per prima cosa determiniamo gli autovalori di $f$ e i corrispondenti autospazi.
Il polinomio caratteristico di $f$ è:

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 0-\lambda & 2 \\ 3 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 12\lambda = \lambda(-\lambda^2 + 6\lambda + 12);$$

pertanto $f$ ha autovalori $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3 - \sqrt{21}$ e $\lambda_3 = 3 + \sqrt{21}$ ciascuno con molteplicità algebrica 1. Troviamo i relativi autospazi:

- $V_{\lambda_1}$ è il sottospazio generato dalle soluzioni del seguente sistema lineare:

$$(A-\lambda_1 I_3)\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -z \\ x = -z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_\lambda = \langle(-1,-1,1)\rangle$$

Posto $\overrightarrow{d_1} = (-1,-1,1)$, una base ortonormale per $V_{\lambda_1}$ è quindi data da $\left\{ \frac{\overrightarrow{d_1}}{\sqrt{\langle \overrightarrow{d_1}, \overrightarrow{d_1} \rangle}} \right\}$.

- $V_{\lambda_2}$ è il sottospazio generato dalle soluzioni del seguente sistema lineare:

$$(A-\lambda_2 I_3)\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}\Rightarrow\begin{pmatrix}-2+\sqrt{21} & 2 & 3\\ 2 & -3+\sqrt{21} & 2\\ 3 & 2 & 2+\sqrt{21}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(-2+\sqrt{21})x+2y+3z=0\\ 2x+(-3+\sqrt{21})y+2z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-\frac{13z-3\sqrt{21}z}{-23+5\sqrt{21}}=-(4+\sqrt{21})z\\ y=\frac{-10z+2\sqrt{21}z}{-23+5\sqrt{21}}=(5+\sqrt{21})z\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{\lambda_2}=\left\langle(-4-\sqrt{21},5+\sqrt{21},1)\right\rangle$$

Posto $\overrightarrow{d_2}=(-4-\sqrt{21},5+\sqrt{21},1)$, una base ortonormale per $V_{\lambda_2}$ è quindi data da $\left\{\frac{\overrightarrow{d_2}}{\sqrt{\left\langle\overrightarrow{d_2},\overrightarrow{d_2}\right\rangle}}\right\}$.

- $V_{\lambda_3}$ è il sottospazio generato dalle soluzioni del seguente sistema lineare:

$$(A-\lambda_3 I_3)\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}\Rightarrow\begin{pmatrix}-2-\sqrt{21} & 2 & 3\\ 2 & -3-\sqrt{21} & 2\\ 3 & 2 & 2-\sqrt{21}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(-2-\sqrt{21})x+2y+3z=0\\ 2x+(-3-\sqrt{21})y+2z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{13z+3\sqrt{21}z}{23+5\sqrt{21}}=(-4+\sqrt{21})z\\ y=\frac{10z+2\sqrt{21}z}{23+5\sqrt{21}}=(5-\sqrt{21})z\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{\lambda_2}=\left\langle(-4+\sqrt{21},5-\sqrt{21},1)\right\rangle$$

Posto $\overrightarrow{d_3}=(-4+\sqrt{21},5-\sqrt{21},1)$, una base ortonormale per $V_{\lambda_3}$ è quindi data da $\left\{\frac{\overrightarrow{d_3}}{\sqrt{\left\langle\overrightarrow{d_3},\overrightarrow{d_3}\right\rangle}}\right\}$.

Notiamo che, essendo $f$ autoaggiunto, $\overrightarrow{d_1}$, $\overrightarrow{d_2}$ e $\overrightarrow{d_3}$ sono ortogonali tra loro, in quanto autovettori relativi ad autovalori distinti.

Ne segue che $\mathcal{B}=\left\{\frac{\overrightarrow{d_1}}{\sqrt{\left\langle\overrightarrow{d_1},\overrightarrow{d_1}\right\rangle}},\frac{\overrightarrow{d_2}}{\sqrt{\left\langle\overrightarrow{d_2},\overrightarrow{d_2}\right\rangle}},\frac{\overrightarrow{d_3}}{\sqrt{\left\langle\overrightarrow{d_3},\overrightarrow{d_3}\right\rangle}}\right\}$ è una base ortonormale di autovettori di $f$.

(b) $I=\{\overrightarrow{v}\in V|\sqrt{<\overrightarrow{v},\overrightarrow{v}>}=\sqrt{<f(\overrightarrow{v}),f(\overrightarrow{v})>}\}=\{\overrightarrow{v}\in V|<\overrightarrow{v},\overrightarrow{v}>=<f(\overrightarrow{v}),f(\overrightarrow{v})>\}$.

Facciamo vedere che $I$ contiene sottospazi di dimensione 1 di $V$, cioè che $\exists\overrightarrow{v}\neq\overrightarrow{0}\in V$ tale che $<\overrightarrow{v}>\subseteq I$.

Sia $\overrightarrow{v}\neq\overrightarrow{0}\in V$. Facciamo vedere che $\lambda\overrightarrow{v}\in I,\ \forall\,\lambda\in\mathbb{R}$:

$<\lambda\overrightarrow{v},\lambda\overrightarrow{v}>=\lambda^2<\overrightarrow{v},\overrightarrow{v}>=\lambda^2<f(\overrightarrow{v}),f(\overrightarrow{v})>=<\lambda f(\overrightarrow{v}),\lambda f(\overrightarrow{v})>=<f(\lambda\overrightarrow{v}),f(\lambda\overrightarrow{v})>\Rightarrow$
$\Rightarrow\lambda\overrightarrow{v}\in I$.

Ne segue che $<\overrightarrow{v}>\subseteq I\,\forall\,\overrightarrow{v}\in V$.

2. (a) In $\mathbf{P}^2{}_{\mathbb{R}}$ sia la retta $r$ di equazione omogenea $3X_0+X_1-2X_2=0$. Determinare equazioni parametriche per $r$.

   (b) Determinare equazioni parametriche e omogenee per la retta $s$ passante per i punti $S[-1,1,-2]$ e $T[2,-3,2]$.

   (c) Determinare l'intersezione tra le rette $r$ e $s$ definite nei punti precedenti.

<u>*Soluzione:*</u>

(a) Per ricavare le equazioni parametriche di $r$ determiamo le soluzioni dell'equazione $3X_0 + X_1 - 2X_2 = 0$ in $\mathbb{R}^3$:

$3X_0 + X_1 - 2X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 2X_2 - 3X_0$.

Ponendo quindi $X_0 = \lambda$ e $X_2 = \mu$ si ottiene:

$$\begin{cases} X_0 = \lambda \\ X_1 = 2\mu - 3\lambda \\ X_2 = \mu \end{cases}, \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$$

Nota bene: escludiamo il caso $(\lambda, \mu) = (0,0)$ perchè la soluzione $(0,0,0)$ non corrisponde a nessun punto del piano proiettivo.

(b) Osservazione

Se $r$ è una retta di $\mathbf{P}^2{}_{\mathbb{R}}$ assegnata mediante due suoi punti distinti $P = [p_0, p_1, p_2]$ e $Q = [q_0, q_1, q_2]$, $r$ possiede l'equazione cartesiana:

$$\begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ p_0 & p_1 & p_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \end{vmatrix} = 0$$

ed equazioni parametriche:

$$\begin{cases} X_0 = \lambda p_0 + \mu q_0 \\ X_1 = \lambda p_1 + \mu q_1 \\ X_2 = \lambda p_2 + \mu q_2 \end{cases}$$

Nel nostro caso la retta $s$ passante per i punti $S[-1, 1, -2]$ e $T[2, -3, 2]$ avrà quindi equazione catesiana:

$$\begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} X_0 - \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} X_1 + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} X_2 = -4X_0 - 2X_1 + X_2 = 0$$

e equazioni parametriche:

$$\begin{cases} X_0 = -\lambda + 2\mu \\ X_1 = \lambda - 3\mu \\ X_2 = -2\lambda + 2\mu \end{cases}, \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$$

(c) L'intersezione tra $r$ ed $s$ è definita dal sistema omogeneo:

$$\begin{cases} 3X_0 + X_1 - 2X_2 = 0 \\ -4X_0 - 2X_1 + X_2 = 0 \end{cases}$$

di rango 2 in 3 indeterminate; per il teorema di Rouchè-Capelli, le soluzioni del sistema formano uno spazio vettoriale di dimensione 1. La soluzione nulla non corrisponde ad un punto del piano proiettivo, mentre tutte le altre corrispondono ad un unico punto del piano proiettivo.

Risolvendo il sistema si ottiene:

$$\begin{cases} X_1 = -\frac{5}{3} X_0 \\ X_2 = \frac{2}{3} X_0 \end{cases}$$

le cui soluzioni $(\lambda, -\frac{5}{3}\lambda, \frac{2}{3}\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ corrispondono all'unico punto proiettivo $[3, -5, 2]$.

3. **Fascio di rette passante per un punto**
Determinare una equazione omogenea per ogni retta di $\mathbf{P}^2{}_{\mathbb{R}}$ passante per il punto $D[3,-1,5]$.

<u>*Soluzione:*</u>

L'equazione generale di una retta nel piano proiettivo $\mathbf{P}^2{}_{\mathbb{R}}$ è:

$$aX_0 + bX_1 + cX_2 = 0 \tag{1}$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$ non tutti nulli.
Una tale retta passa per $D$ se e solo se le coordinate omogenee di $D$ sono soluzione dell'equazione omogenea (1), cioè quando

$$3a - b + 5c = 0. \tag{2}$$

Pertanto, ogni soluzione di tale equazione nelle incognite $a, b$ e $c$ corrisponde a una retta passante per $D$: soluzioni proporzionali corrispondono alla stessa retta e la soluzione nulla non corrisponde a nessuna retta.

Il sottospazio delle soluzioni di (2) è dato da $S = \{(a, 3a+5c, c) | a, c \in \mathbb{R}\} =< (0,5,1), (1,3,0) >$.
Ne segue che ogni retta passante per $D$ è combinazione lineare delle rette $r : 5X_1 + X_2 = 0$ e $s : X_0 + 3X_1 = 0$ che corrispondono rispettivamente alle soluzioni $(0,5,1)$ e $(1,3,0)$, cioè ha equazione della forma:

$$\lambda(5X_1 + X_2) + \mu(X_0 + 3X_1) = 0, \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$$

Si dice che tali rette formano un *fascio di rette.*

4. In $\mathbf{P}^2{}_{\mathbb{C}}$, siano assegnati i punti $A[1,1,0], B[1,2,1], C[1,-1,-1], D[1,0,1]$:

   (a) Mostrare che i punti $A$,$B$, $C$, $D$ sono in posizione generale.

   (b) Determinare le equazioni della proiettività $\varphi : \mathbf{P}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbf{P}^2_{\mathbb{R}}$ tale che $\varphi([1,0,0]) = A$, $\varphi([0,1,0]) = B$, $\varphi([0,0,1]) = C$, $\varphi([1,1,1]) = D$.

   <u>*Soluzione:*</u>

   (a) *Definizione 1:* Sia $V$ uno spazio vettoriale; $n$ punti $P_1 = [\overrightarrow{v_1}]$, $P_2 = [\overrightarrow{v_2}]$, ..., $P_n = [\overrightarrow{v_n}] \in \mathbf{P}(V)$ si dicono *linearmente indipendenti* se i vettori $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}$ sono linearmente indipendenti.

   *Definizione 2:* Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione $n+1$; $t$ punti $P_1 = [\overrightarrow{v_1}]$, $P_2 = [\overrightarrow{v_2}]$, ..., $P_t = [\overrightarrow{v_t}] \in \mathbf{P}(V)$ si dicono in *posizione generale* se sono linearmente indipendenti (e in questo caso $t \leq n+1$) oppure se $t > n+1$ e $n+1$ tra essi, comunque scelti, sono linearmente indipendenti.

   Nel nostro caso $V = \mathbb{R}^3$. Pertanto $A$,$B$, $C$, $D$ sono in posizione generale se comunque scelti tre punti dalla quaterna, essi sono lineamente indipendenti, cioè non allineati.
   Si ha:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

   Ne segue che $A$,$B$, $C$, $D$ sono in posizione generale.

(b) *Definizione 3:* Sia $\mathbf{P} = \mathbf{P}(V)$ uno spazio proiettivo. Una proiettività è una corrispondenza biunivoca $\varphi : \mathbf{P} \to \mathbf{P}$ tale che esiste un isomorfismo $T : V \to V$ tale che:

$$\varphi([\overrightarrow{v}]) = [T(\overrightarrow{v})]$$

per ogni $[\overrightarrow{v}] \in \mathbf{P}$.

Sia $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ la matrice $3 \times 3$ associata all'isomorfismo $T$. Dalla definizione si deve avere $\varphi([\overrightarrow{v}]) = [M\overrightarrow{v}]$ per ogni $[\overrightarrow{v}] \in \mathbf{P}^2_{\mathbb{R}}$.

- $A = [1,1,0] = \varphi([1,0,0]) = [M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}] = \left[\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} a \\ d \\ g \end{pmatrix}\right] \Rightarrow$

  $$\Rightarrow \exists\, \lambda \text{ tale che } \begin{pmatrix} a \\ d \\ g \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = \lambda \\ d = \lambda \\ g = 0 \end{cases}$$

- $B = [1,2,1] = \varphi([0,1,0]) = [M \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}] = \left[\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} b \\ e \\ h \end{pmatrix}\right] \Rightarrow$

  $$\Rightarrow \exists\, \mu \text{ tale che } \begin{pmatrix} b \\ e \\ h \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b = \mu \\ e = 2\mu \\ h = \mu \end{cases}$$

- $C = [1,-1,-1] = \varphi([0,0,1]) = [M \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}] = \left[\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} c \\ f \\ i \end{pmatrix}\right] \Rightarrow$

  $$\Rightarrow \exists\, \nu \text{ tale che } \begin{pmatrix} c \\ f \\ i \end{pmatrix} = \nu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c = \nu \\ f = -\nu \\ i = -\nu \end{cases}$$

Otteniamo quindi che:

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \lambda & 2\mu & -\nu \\ 0 & \mu & -\nu \end{pmatrix}$$

Imponiamo l'ultima condizione:

$$D = [1,0,1] = \varphi([1,1,1]) = [M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}] = \left[\begin{pmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \lambda & 2\mu & -\nu \\ 0 & \mu & -\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} \lambda+\mu+\nu \\ \lambda+2\mu-\nu \\ \mu-\nu \end{pmatrix}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists\, \rho \text{ tale che } \begin{pmatrix} \lambda+\mu+\nu \\ \lambda+2\mu-\nu \\ \mu-\nu \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ \rho \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda+\mu+\nu = \rho \\ \lambda+2\mu-\nu = 0 \\ \mu-\nu = \rho \end{cases}$$

Risolvendo il sistema nelle indeterminate $\lambda, \mu$ e $\nu$, si trova $\begin{cases} \lambda = -4\rho \\ \mu = 3\rho \\ \nu = 2\rho \end{cases}$. Sostituendo tali valori nella matrice si ricava:

$$M = \begin{pmatrix} -4\rho & 3\rho & 2\rho \\ -4\rho & 6\rho & -2\rho \\ 0 & 3\rho & -2\rho \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} -4 & 3 & 2 \\ -4 & 6 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Poichè ogni proiettività è definita a meno di un fattore di proporzionalità possiamo porre $\rho = 1$. Ne concludiamo che $\varphi$ ha equazioni:

$$\begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 2 \\ -4 & 6 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}.$$

5. Sia assegnata in $\mathbf{P}^2_{\mathbb{R}}$ la famiglia di coniche

$$C_\lambda : \lambda X_0^2 - 2\lambda X_1 X_2 + X_1^2 = 0, \, \forall \, \lambda \, \in \, \mathbb{R}.$$

(a) Verificare che $C_\lambda$ è una conica generale $\Leftrightarrow \lambda \neq 0$.

(b) Determinare i valori $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali $C_\lambda$ è una conica generale a punti reali.

*Soluzione:*

(a) La matrice associata alla conica $\mathcal{C}_\lambda$ è:

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

Risulta: $\mathcal{C}_\lambda$ è una conica generale $\Leftrightarrow$ det$(A_\lambda) \neq 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0$.

(b) Poniamo $\lambda \neq 0$.
Per determinarne i valori $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali $\mathcal{C}_\lambda$ è una conica generale a punti reali studiamo la segnatura di $A_\lambda$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$; infatti, in caso di segnatura $(1, 2)$ o $(2, 1)$ $A_\lambda$ sarà una conica a punti reali, altrimenti se la segnatura è $(3, 0)$ o $(0, 3)$ sarà una conica a punti non reali.

Procediamo pertanto alla diagonalizzazione di $A_\lambda$, applicando alla forma bilineare $b$ (avente matrice $A_\lambda$) il metodo induttivo, in modo da ottenere una base $b$-diagonalizzante.

$\overrightarrow{e_3}$ è un vettore non isotropo. Pertanto $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{e_3}$ costituirà il primo vettore della base nostra diagonalizzante:

Allora $\mathbb{R}^3 = \langle \overrightarrow{v_1} \rangle \oplus \overrightarrow{v_1}^\perp$, dove

$$\overrightarrow{v_1}^\perp = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} =$$
$$= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | -\lambda y + z = 0 \right\}$$

$\overrightarrow{v_2} = (1, 0, 0) \in \overrightarrow{v_1}^\perp$ e $b(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2}) = \lambda \neq 0$, cioè $\overrightarrow{v_2}$ è non isotropo. Pertanto $\overrightarrow{v_2}$ costituirà il secondo vettore della nostra base diagonalizzante e si avrà:
$\mathbb{R}^3 = \langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle \oplus \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}^\perp$

A questo punto rimane da trovare $\overrightarrow{v_3} \in \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}^\perp = \overrightarrow{v_1}^\perp \cap \overrightarrow{v_2}^\perp$.

$$\overrightarrow{v_2}^\perp = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = 0 \right\}$$

Pertanto $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}^\perp = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | -\lambda y + z = 0 \quad \text{e} \quad x = 0 \right\}$.

$\overrightarrow{v_3} = (0, 1, \lambda) \in \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}^\perp$ e $b(\overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_3}) = -\lambda^2 \neq 0$, cioè $\overrightarrow{v_3}$ è non isotropo. Pertanto

$\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ è una base diagonalizzante per $b$.

Sia

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

la matrice del cambiamento di base dalla base $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ alla base canonica; in base $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ la forma bilineare $b$ ha matrice diagonale $B_\lambda$ (congruente ad $A_\lambda$):

$$B_\lambda = {}^tPA_\lambda P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^2 \end{pmatrix}$$

Si osserva subito che $B_\lambda$ ha segnatura $(1,2)$ oppure $(2,1)$. Infatti gli elementi 1 e $-\lambda^2$ hanno sempre segno discorde. Conseguentemente anche $A_\lambda$ ha segnatura $(1,2)$ oppure $(2,1)$; pertanto per ogni $\lambda \neq 0$, $\mathcal{C}_\lambda$ è sempre una conica generale a punti reali.

*Osservazione*: Alternativamente si poteva subito concludere che $\mathcal{C}_\lambda$ fosse una conica generale a punti reali $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ notando che il minore principale $D_2 = \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ è nullo $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$, da cui segue che $A_\lambda$ non è mai definita negativa, nè definita positiva e quindi ha necessariamente segnatura $(1,2)$ o $(2,1)$.

6. Determinare, in $\mathbb{A}^2_\mathbb{R}$, le equazioni di tutte le iperboli affini non degeneri, aventi centro $C = (1,0)$ e punti impropri $[0,1,2]$ e $[0,1,-1]$.

<u>*Soluzione:*</u>

La matrice $A$ associata a una conica $\mathcal{C}$ di $\mathbb{A}^2_\mathbb{R}$ è del tipo:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

(dipendente da 6 parametri reali).

- $\mathcal{C}$ ha centro in $C \Leftrightarrow C = (1,0)$ è soluzione del sistema $\begin{cases} b + dx + ey = 0 \\ c + ex + fy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + d = 0 \\ c + e = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} d = -b \\ e = -c \end{cases} \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & -b & -c \\ c & -c & f \end{pmatrix}$

- <u>Osservazione</u>: Data una conica $\mathcal{C}$ di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ di equazione

$$f(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0,$$

la *chiusura proiettiva* di $\mathcal{C}$ è la conica $\overline{\mathcal{C}} \subseteq \mathbf{P}^2(\mathbb{R})$ definita dall'equazione $F(X_0, X_1, X_2) = 0$, dove $F(X_0, X_1, X_2)$ è il polinomio omogeneizzato di $f(x,y)$, cioè:

$$F(X_0, X_1, X_2) = a_{11}X_1^2 + 2a_{12}X_1X_2 + a_{22}X_2^2 + 2a_{01}X_0X_1 + 2a_{02}X_0X_2 + a_{00}X_0^2 = 0.$$

I *punti impropri* sono allora le intersezioni di $\overline{\mathcal{C}}$ con la retta impropria $X_0 = 0$.

Pertanto $P = [x_0, x_1, x_2]$ è un punto improprio di $\mathcal{C} \Leftrightarrow P$ risolve il sistema:

$$\begin{cases} X_0 = 0 \\ a_{11}X_1^2 + 2a_{12}X_1X_2 + a_{22}X_2^2 + 2a_{01}X_0X_1 + 2a_{02}X_0X_2 + a_{00}X_0^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X_0 = 0 \\ a_{11}X_1^2 + 2a_{12}X_1X_2 + a_{22}X_2^2 = 0 \end{cases}$$

Imponiamo allora la condizione che i punti $[0,1,2]$ e $[0,1,-1]$ siano soluzione del sistema:

$$\begin{cases} X_0 = 0 \\ -bX_1^2 - 2cX_1X_2 + fX_2^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -b - 4c + 4f = 0 \\ -b + 2c + f = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2f \\ c = \frac{f}{2} \end{cases}$$

Si ottiene dunque:

$$A = \begin{pmatrix} a & 2f & \frac{f}{2} \\ 2f & -2f & -\frac{f}{2} \\ \frac{f}{2} & -\frac{f}{2} & f \end{pmatrix} \tag{3}$$

Infine la conica $\mathcal{C}$ è generale e dunque $\det(A) = -\frac{9}{4}f^2(a+2f) \neq 0$, da cui ricaviamo le ulteriori condizioni

$$f \neq 0 \quad \text{e} \quad a + 2f \neq 0. \tag{4}$$

Le coniche verificanti le condizioni (3) e (4) sono tutte e solo le iperboli del tipo richiesto.

*Nota Bene*: La condizione che $\mathcal{C}$ sia un'iperbole è automaticamente verificata nel momento in cui si impone che $\mathcal{C}$ possieda due punti impropri distinti.

7. Sia $\mathbb{A}$ un piano affine reale con riferimento $O_{\vec{i},\vec{j}}$.
Passando al suo completamento proiettivo $\overline{\Gamma}$ in $\mathbf{P}^2_{\mathbb{R}}$ si determinino gli eventuali punti all'infinito della conica $\Gamma \subseteq \mathbb{A}$, di equazione:

$$X^2 - 32Y^2 - 4XY - X - Y = 0$$

Si determini una proiettività $p : \mathbf{P}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbf{P}^2_{\mathbb{R}}$ tale che $\overline{\Gamma} = p(\overline{\Pi})$, dove $\Pi = \overline{\Pi} \cap \mathbb{A}$ è la parabola di equazione $Y - X^2 = 0$.
(Seconda Prova di Esonero del 17 dicembre 2009)

<u>*Soluzione:*</u>

Per quanto osservato nell'esercizio precedente $\overline{\Gamma}$ ha equazione:

$$X_1^2 - 32X_2^2 - 4X_1X_2 - X_0X_1 - X_0X_2 = 0.$$

Ora, $P = [x_0, x_1, x_2]$ è un punto all'infinito di $\Gamma \Leftrightarrow P$ risolve il sistema:

$$\begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1^2 - 32X_2^2 - 4X_1X_2 - X_0X_1 - X_0X_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_0 = 0 \\ 0 = X_1^2 - 32X_2^2 - 4X_1X_2 = (X_1 - 8X_2)(X_1 + 4X_2) \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 8X_2 \end{cases} \vee \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = -4X_2 \end{cases}$$

Ne segue che $\Gamma$ ha due punti all'infinito:

$$P_1 = [0, 8, 1] \quad \text{e} \quad P_2 = [0, -4, 1].$$

Allo stesso modo $\overline{\Pi}$ ha equazione:

$$X_0X_2 - X_1^2 = 0.$$

Ora affinchè esista una proiettività $p : \mathbf{P}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbf{P}^2_{\mathbb{R}}$ tale che $\overline{\Gamma} = p(\overline{\Pi})$ $\overline{\Gamma}$ e $\overline{\Pi}$ devono essere dello stesso tipo: facciamo vedere che $\overline{\Gamma}$ e $\overline{\Pi}$ sono entrambe coniche generali a punti reali.

Siano $A$ e $B$ le matrici associate rispettivamente a $\overline{\Gamma}$ e $\overline{\Pi}$ si ha:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & -2 & -32 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det A = \frac{27}{4} \neq 0$ e $\det B = \frac{1}{4} \neq 0$, da cui $\overline{\Gamma}$ e $\overline{\Pi}$ sono entrambe coniche generali. Inoltre essendo nullo, sia in $A$ che in $B$, il minore principale $D_1$, $A$ e $B$ non sono né definite negative, né definite positive, per cui avranno segnatura $(2,1)$ o $(1,2)$. Ne segue che $\overline{\Gamma}$ e $\overline{\Pi}$ sono entrambe coniche generali a punti reali e pertanto avranno forma canonica corrispondente:

$$\mathcal{C} : X_0^2 + X_1^2 - X_2^2 = 0.$$

Per determinare allora una proiettività $p : \mathbf{P}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbf{P}^2_{\mathbb{R}}$ tale che $\overline{\Gamma} = p(\overline{\Pi})$, determiniamo dapprima due proiettività $p'$ e $p''$ tali che $p'(\overline{\Gamma}) = \mathcal{C} = p''(\overline{\Pi})$. A questo punto $p$ sarà data da $p = (p')^{-1} \circ p''$.

Osservazione: Per determinare le proiettività che riducono una conica dello spazio proiettivo alla corrispondente forma canonica, utilizzeremo lo stesso metodo induttivo usato per la diagonalizzazione delle forme bilineari e più precisamente il metodo di riduzione alla forma canonica (o di Sylvester).

Determiniamo $p'$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & -2 & -32 \end{pmatrix}$$

Sia $F$ la forma bilineare associata a $A$

$\overrightarrow{e_2}$ è un vettore non isotropo. Pertanto $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{e_2}$ costituirà il primo vettore della base nostra diagonalizzante:

Allora $\mathbb{R}^3 = \langle \overrightarrow{v_1} \rangle \oplus \overrightarrow{v_1}^{\perp}$, dove

$\overrightarrow{v_1}^{\perp} = \left\{ \overrightarrow{w} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | F(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{w}) = 0 \right\}$.

$$F(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{w}) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & -2 & -32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}x + y - 2z = 0$$

Pertanto $\overrightarrow{v_1}^{\perp} = \left\{ \overrightarrow{w} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \frac{1}{2}x + y - 2z = 0 \right\}$.

$\overrightarrow{v_2} = (0,2,1) \in \overrightarrow{v_1}^{\perp}$ e $F(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2}) = -36$. Essendo $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ entrambi non isotropi e ortogonali tra loro, essi risulteranno linearmente indipendenti. Pertanto $\overrightarrow{v_2}$ costituirà il secondo vettore della nostra base diagonalizzante e si avrà:
$\mathbb{R}^3 = \langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle \oplus \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}^{\perp}$

A questo punto rimane da trovare $\overrightarrow{v_3} \in \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}^{\perp} = \overrightarrow{v_1}^{\perp} \cap \overrightarrow{v_2}^{\perp}$.

$\overrightarrow{v_2}^{\perp} = \left\{ \overrightarrow{w} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | F(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w}) = 0 \right\}$.

$$F(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w}) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & -2 & -32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & -36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{3}{2}x - 36z = 0$$

Pertanto $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}^{\perp} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \frac{1}{2}x + y - 2z = 0 \quad \text{e} \quad \frac{3}{2}x - 36z = 0 \right\}$.

$\overrightarrow{v_3} = (24,-10,1) \in \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}^{\perp}$ e $b(\overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_3}) = -108 \neq 0$, cioè $\overrightarrow{v_3}$ è non isotropo. Pertanto $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ è una base diagonalizzante per $A$.

Sia

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 24 \\ 1 & 2 & -10 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice del cambiamento di base dalla base $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ alla base canonica; rispetto alla base $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ la forma bilineare $F$ ha matrice diagonale $A'$ (congruente ad $A$):

$$A' = {}^tPAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & 0 \\ 0 & 0 & -108 \end{pmatrix}$$

Allora, se $d_{ii} = F(\overrightarrow{v_i}, \overrightarrow{v_i})$ è l'elemento i-esimo della diagonale, posto $\overrightarrow{w_i} = \frac{\overrightarrow{v_i}}{\sqrt{|d_{ii}|}}$, $i = 1, 2, 3$, in base $\{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{w_3}\}$ $F$ ha matrice
$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Pertanto definita $M$ la matrice del cambiamento di base dalla base $\{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{w_3}\}$ alla base canonica:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{8}{\sqrt{12}} \\ 1 & \frac{1}{3} & -\frac{10}{3\sqrt{12}} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3\sqrt{12}} \end{pmatrix},$$

se $(X_0, X_1, X_2)$ e $(X'_0, X'_1, X'_2)$ sono le coordinate rispettivamente nella base canonica e nella base $\{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{w_3}\}$ si ha:

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} X'_0 \\ X'_1 \\ X'_2 \end{pmatrix}$$

e di conseguenza le equazioni delle proiettività $p'$ sono:

$$\begin{pmatrix} X'_0 \\ X'_1 \\ X'_2 \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -2 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 6 \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

<u>Determiniamo $p''$.</u>

$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Sia $G$ la forma bilineare associata a $B$

$\overrightarrow{e_2}$ è un vettore non isotropo. Pertanto $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{e_2}$ costituirà il primo vettore della base nostra diagonalizzante:

Allora $\mathbb{R}^3 = \langle \overrightarrow{v_1} \rangle \oplus \overrightarrow{v_1}^{\perp}$, dove

$\overrightarrow{v_1}^{\perp} = \left\{ \overrightarrow{w} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | G(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{w}) = 0 \right\}$.

$$G(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{w}) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -y = 0$$

Pertanto $\overrightarrow{v_1}^{\perp} = \left\{ \overrightarrow{w} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | -y = 0 \right\}$.

$\overrightarrow{v_2} = (1,0,1) \in \overrightarrow{v_1}^{\perp}$ e $G(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2}) = 1$. Essendo $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ entrambi non isotropi e ortogonali tra loro, essi risulteranno linearmente indipendenti.
Pertanto $\overrightarrow{v_2}$ costituirà il secondo vettore della nostra base diagonalizzante e si avrà:
$\mathbb{R}^3 = \langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle \oplus \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}^{\perp}$

A questo punto rimane da trovare $\overrightarrow{v_3} \in \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}^{\perp} = \overrightarrow{v_1}^{\perp} \cap \overrightarrow{v_2}^{\perp}$.

$\overrightarrow{v_2}^{\perp} = \left\{ \overrightarrow{w} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | G(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w}) = 0 \right\}$.

$G(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w}) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & -2 & -32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z = 0$
Pertanto $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}^{\perp} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | -y = 0 \quad \text{e} \quad x + z = 0 \right\}$.

$\overrightarrow{v_3} = (1,0,-1) \in \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}^{\perp}$ e $b(\overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_3}) = -1 \neq 0$, cioè $\overrightarrow{v_3}$ è non isotropo. Segue che $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ è una base diagonalizzante per $B$.

Sia
$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

la matrice del cambiamento di base dalla base $\{\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_3}\}$ (l'ordine degli elementi della base è stato modificato non a caso...) alla base canonica; rispetto alla base $\{\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_3}\}$ la forma bilineare $G$ ha matrice diagonale $B'$ (congruente ad $B$):

$$B' = {}^tQBQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

che è già in forma canonica di Sylvester. Allora se $(X_0, X_1, X_2)$ e $(X'_0, X'_1, X'_2)$ sono le coordinate rispettivamente nella base canonica e nella base $\{\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{w_3}\}$ si ha: si ha:

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} X'_0 \\ X'_1 \\ X'_2 \end{pmatrix}$$

e di conseguenza le equazioni della proiettività $p''$ sono:

$$\begin{pmatrix} X'_0 \\ X'_1 \\ X'_2 \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

In definitiva si ha:

$$p([X_0, X_1, X_2]) = (p')^{-1} \circ p''([X_0, X_1, X_2]) = (p')^{-1} \left[ Q^{-1} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \right] = \left[ MQ^{-1} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \right]$$

cioè $p$ avrà equazioni:

$$\begin{pmatrix} X'_0 \\ X'_1 \\ X'_2 \end{pmatrix} = MQ^{-1} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{8}{\sqrt{12}} \\ 1 & \frac{1}{3} & -\frac{10}{3\sqrt{12}} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3\sqrt{12}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} - \frac{5}{6\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} + \frac{5}{6\sqrt{3}} \\ \frac{1}{12\sqrt{3}} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{12\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}.$$