Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE210

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. A. Verra
Tutori: Simona Dimase e Annamaria Iezzi

Tutorato 4 (28 Ottobre 2010)
Operatori unitari e ripasso

1. Sia V uno spazio vettoriale e sia $T : V \to V$ un operatore unitario. Dimostrare che:
   (a) Se T ha autovalori $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, allora gli autospazi V_{λ_1} e V_{λ_2} sono ortogonali tra loro.
   (b) Se $\overrightarrow{v}$ è un autovettore di T risulta:
   $$T(\overrightarrow{v}^{\perp}) \subseteq \overrightarrow{v}^{\perp}.$$

2. In $\mathbb{R}^2$ è assegnato un prodotto scalare $\langle , \rangle$ definito rispetto ad una base $\mathbb{E}$ dalla matrice
   $$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
   Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, sia $T_\alpha : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'operatore definito (in base $\mathbb{E}$) dalla matrice
   $$\mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ T_α è unitario.

3. Si consideri la forma simmetrica $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la cui forma quadratica associata $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è
   $$q(\overrightarrow{v}) = 5x^2 + 2xy - 2xz + y^2 + 4yz + 4z^2, \qquad \overrightarrow{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$
   (a) Si determini una base diagonalizzante $\mathcal{B}$. Si determinino rango e segnatura di b.
   (b) Sia $i : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica che, rispetto alla base $\mathcal{B}$, ha come matrice associata la matrice identità. Si determinino i valori di t per i quali $b + ti : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è definita positiva.

   (Appello A del 29 gennaio 2010)

4. Sia $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica la cui matrice associata rispetto alla base canonica $e = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ è
   $$\begin{pmatrix} h & -1 & 2 \\ -1 & h & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad h \in \mathbb{R}.$$
   (a) Si trovino, se esistono, i valori di $h \in \mathbb{R}$ per cui b è non degenere e quelli per cui è un prodotto scalare.
   (b) Per $h = -1$ si stabilisca se può esistere una base di $\mathbb{R}^3$, ortogonale rispetto a b, contenente il vettore $4\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_3}$.
   (c) Per $h = 0$ si stabilisca se può esistere una base $f = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$, ortogonale rispetto a b e tale che
   $$b(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1}) = 0, \qquad b(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2}) = 1, \qquad b(\overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_3}) = 2.$$

   (Appello A del 18 febbraio 2010)

5. E' assegnato il polinomio

$$P = x^2 - \overline{3}y^2 + \overline{5}xy - \overline{3}yz \in \mathbb{Z}_7\,[x, y, z]\,.$$

Sia $V = (\mathbb{Z}_7)^3$ e si fissi in V la base $\mathbb{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$.

(a) Scrivere la matrice A della forma quadratica Q associata al polinomio P (in base $\mathbb{E}$) e determinarne il rango.

(b) Diagonalizzare Q e indicarne l'espressione in una base Q-diagonalizzante.

6. Sia $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica tale che $I_b(\mathbb{R}^n) = \{0\}$. Dimostrare, utilizzando il teorema di Sylvester, che risulta:

$$b(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) > 0, \forall \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad \text{oppure} \quad b(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) < 0, \forall \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

[cioè b è definita positiva o definita negativa].

7. Sia $a : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare così definita rispetto alla base canonica $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}\}$:

$$a(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2}, \qquad a(\overrightarrow{e_2}) = 2\overrightarrow{e_1} + 5\overrightarrow{e_2}$$

$$a(\overrightarrow{e_3}) = 4\overrightarrow{e_3} + 2\overrightarrow{e_4}, \qquad a(\overrightarrow{e_4}) = 2\overrightarrow{e_3} + 2\overrightarrow{e_4}$$

(a) Verificare che a è un operatore simmetrico rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$ (*Nota*: dato uno spazio vettoriale euclideo V con prodotto scalare $\langle\, , \rangle$, un operatore $T \in \mathrm{End}V$ si dice *simmetrico* se $\langle T(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{y}\rangle = \langle \overrightarrow{x}, T(\overrightarrow{y})\rangle$, $\forall\, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in V$).

(b) Determinare rango e segnatura della forma bilineare simmetrica $b : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ così definita:

$$b(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \langle a(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{y}\rangle$$

dove $\langle\, , \rangle$ indica il prodotto scalare standard.

(c) Scrivere l'espressione canonica (o di Sylvester) di b, determinando una base rispetto in cui b si scrive in forma canonica.

8. Si determinino, scrivendone la matrice associata rispetto alla base canonica $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$, tutte le forme bilineari simmetriche

$$F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

soddisfacenti alle condizioni seguenti:

(a) $\overrightarrow{e_1}$ e $\overrightarrow{e_2}$ sono vettori isotropi;

(b) Lo spazio ortogonale di $\overrightarrow{v} = (1, 1, 1)$ rispetto a F è il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$.

Al variare di F si determini:

- una base diagonalizzante per F e se ne deducano segnatura e rango.
- Due vettori linearmente indipendenti $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ e che generano un sottospazio sul quale F è definita positiva.
- Una base diagonalizzante contenente il vettore $\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{v}$.

(Prova di esonero del 5-11-2007)