Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE210

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. A. Verra
Tutori: Simona Dimase e Annamaria Iezzi

TUTORATO 6 (26 NOVEMBRE 2010)
CONICHE

1. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 3 e sia $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$ una sua base $\mathcal{B}$ ortonormale rispetto a un prodotto scalare $s : V \times V \to \mathbb{R}$. Si determinino:
   (a) Le matrici rispetto a $\mathcal{B}$ delle forme bilineari simmetriche F tali che
      - F è non degenere;
      - $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}$ sono isotropi;
      - $F(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_3}) = F(\overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}) = 0$;
      - $F(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}) = F(\overrightarrow{b_3}, \overrightarrow{b_3})$.

   (b) Determinare una base ortonormale diagonalizzante per ogni F.

   (Prova di esonero del 10-11-2008)

2. Sia $\mathcal{C}$ la conica di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ di equazione:
$$x^2 + 5xy + 6y^2 - 4 = 0.$$
   (a) Riconoscere che $\mathcal{C}$ è un'iperbole non degenere e determinare la forma canonica ad essa affinemente equivalente.
   (b) Trovare il luogo dei punti medi delle corde di $\mathcal{C}$ parallele al vettore $\overrightarrow{v} = (1, 0)$ e verificare che tali punti medi sono allineati.

3. Sia data in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ la conica $\mathcal{C}_{(a,b)}$ di equazione:
$$x^2 + 6xy - by^2 - a = 0.$$
   (a) Classificare $\mathcal{C}_{(a,b)}$ al variare di $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Esistono valori di $a, b \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_{(a,b)}$ sia una parabola non degenere?
   (b) Determinare a e b tali che la conica $\mathcal{C}_{(a,b)}$ passi per i punti $P_1 = (0, \sqrt{2})$ e $P_2 = (1, -3 + \sqrt{10})$.
   (c) Sia $\mathcal{C}$ la conica che verifica (b) e sia $\mathcal{D}$ la conica di equazione $xy - 3x - 2y + 4 = 0$. Esiste un'affinità T tale che $T(\mathcal{C}) = \mathcal{D}$? In caso affermativo determinarla.

4. Sia $\mathcal{C}$ una conica affine avente equazione
$$F(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$
   Sia $A_{00} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$.
   (a) Posto $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_{01} \\ a_{02} \end{pmatrix}$, verificare che $F(x, y) = {}^tX A_{00} X + 2\, {}^t\overrightarrow{a} X + a_{00}$.
   (b) Verificare che il rango di A e il segno di $\det A_{00}$ sono invarianti affini.

(c) Dimostrare che $\mathcal{C}$ è una conica a centro $\Leftrightarrow$ $\mathcal{C}$ è simmetrica rispetto ad un unico punto P_0, dove le coordinate di $P_0 = (x_0, y_0)$ (detto *centro*) sono soluzione del sistema lineare:

$$\begin{cases} a_{01} + a_{11}x + a_{12}y = 0 \\ a_{02} + a_{12}x + a_{22}y = 0 \end{cases}$$

(d) Sia $\mathcal{D}$ è una conica a centro con centro nel punto Q_0. Dimostrare che se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ sono affinemente equivalenti tramite l'affinità f (cioè $f(\mathcal{C}) = \mathcal{D}$) allora risulta $f(Q_0) = P_0$.

5. Sia $\mathcal{C}$ l'ellisse di $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$ di equazione:

$$2x^2 + 4xy + 5y^2 - 4x - 2y - 3 = 0.$$

(a) Determinare tutte le isometrie di $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$ che trasformano $\mathcal{C}$ nella forma canonica $\mathcal{D}$ ad essa congruente.

(b) Determinarne il centro, i due assi di simmetria e i quattro vertici.

6. Determinare le equazioni di tutte le coniche degeneri a centro $\mathcal{C}$ in $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$:

(a) aventi centro in $C = (0, -1)$ e passanti per i punti $P_1 = (1, 2i)$ e $P_2 = (2, 1)$.

(b) aventi centro in $C = (-3, 1)$ e passanti per i punti $P_1 = (-1, 0)$ e $P_2 = (1, -1)$.