Geometria e Algebra - MIS-Z

Secondo Esonero - Soluzioni

13/06/2023

Nome e Cognome: ____________________

Corso di Laurea: ____________________

Matricola: ____________________

Informazioni

Questo esonero contiene 4 esercizi per un totale di 34 punti. Sia x il punteggio il punteggio totale ottenuto. Il compito è ritenuto sufficiente se $x \geq 18$. In tal caso il voto del secondo esonero appello sarà dato da x.

Le risposte devono essere opportunamente giustificate per ottenere il punteggio massimo. Le risposte indecifrabili non verranno valutate.

Il tempo a disposizione è di 3 ore. È vietato l'utilizzo di ogni tipo di calcolatrice.

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	

TOTALE

ESERCIZIO 1 [8 punti]. **Vero o Falso?**

Per ciascun asserto si stabilisca se è vero o falso, motivando in modo conciso ed esauriente la risposta.

(a) Nel famiglia di piani

$$\pi_h : X + h^2 Y + 2hZ = 3, \quad h \in \mathbb{R}$$

esiste un piano passante per il punto $(1, 1, 1)$.

■ **VERO**

□ **FALSO**

Giustificazione

Il punto $(1, 1, 1)$ appartiene a π_h se se solo se esiste $h \in \mathbb{R}$ tale che $1 + h^2 + 2h = 3 \Leftrightarrow h^2 + 2h - 2 = 0$. Poiché $\Delta = 12 \geq 0$, tale equazione di secondo grado ha almeno una soluzione in $\mathbb{R}$. Di conseguenza esiste $h \in \mathbb{R}$ tale che $(1, 1, 1) \in \pi_h$.

(b) Per ogni $k \in \mathbb{R}$ l'applicazione

$$\begin{array}{rccc} f_k & : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) & \mapsto & (x + k, ky) \end{array}$$

è un'applicazione lineare.

□ **VERO**

■ **FALSO**

Giustificazione

Per $k = 1$ l'applicazione

$$\begin{array}{rccc} f_1 : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) & \mapsto & (x + 1, y) \end{array}$$

non è un'applicazione lineare poiché $f_1(0, 0) = (1, 0) \neq (0, 0)$.

(c) Sia V uno spazio vettoriale euclideo con prodotto scalare $\langle\, , \rangle$. Siano $u, v, w \in V$ tali che v è ortogonale sia a u che a w. Allora v è ortogonale a $u + w$.

■ **VERO**

□ **FALSO**

Giustificazione

Per definizione se v è ortogonale sia a u che a w allora $\langle v, u\rangle = 0$ e $\langle v, w\rangle = 0$. Quindi si ha

$$\langle v, u + w\rangle = \langle v, u\rangle + \langle v, w\rangle = 0 + 0 = 0,$$

ossia v è ortogonale a $u + w$.

(d) Esiste un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tale che $f(1, 0, 0) = 1$, $f(1, 1, 0) = 2$ e $f(1, 1, 1) = 3$.

■ **VERO**

□ **FALSO**

Giustificazione

Tale applicazione esiste (ed è unica) poiché i vettori $(1, 0, 0), (1, 1, 0)$ e $(1, 1, 1)$ costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$.

ESERCIZIO 2 [8 punti]. **Geometria nello spazio.**

Si consideri lo spazio $\mathbb{E}^3$ con il riferimento cartesiano standard.

(a) Si scrivano le equazioni parametriche e le equazione cartesiane della retta r_1 passante per i punti $A(2,0,-1)$ e $B(-1,1,1)$ di $\mathbb{E}^3$.

Svolgimento

Per scrivere le equazioni parametriche di r_1 abbiamo bisogno di un punto della retta e di un vettore direttore. Scegliamo:

- Punto: $A(2,0,-1)$;
- Vettore direttore: $\overrightarrow{AB} = (-3,1,2)$.

Quindi le equazioni parametriche di r_1 sono

$$r_1 : \begin{cases} x = -3t + 2 \\ y = t \\ z = 2t - 1 \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Sostituendo $y = t$ nella prima e nella terza equazione, troviamo le corrispondenti equazioni cartesiane:

$$r_1 : \begin{cases} X + 3Y - 2 = 0 \\ -2Y + Z + 1 = 0 \end{cases}.$$

(b) Al variare di $h \in \mathbb{R}$ si determini la posizione reciproca della retta r_1 e del piano π_h, dove π_h è definito dall'equazione cartesiana:

$$\pi_h : X - hY + hZ = 1.$$

Per i valori di h per cui r_1 e π_h sono incidenti se ne determini il punto di intersezione e per i valori di h per cui r_1 e π_h sono paralleli se ne determini la distanza.

Svolgimento

Per determinare la posizione reciproca del piano π_h e della retta r_1, studiamo il numero di soluzioni del sistema

$$\begin{cases} X + 3Y = 2 \\ -2Y + Z = -1 \\ X - hY + hZ = 1 \end{cases},$$

al variare di h.
Consideriamo allora la matrice orlata associata al sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -h & h & 1 \end{pmatrix}.$$

Effettuando nell'ordine le operazioni seguenti:

1. $R_3 \leftarrow R_3 - R_1$,
2. $R_3 \leftarrow R_3 - \frac{h+3}{2} R_2$,

otteniamo la matrice a scalini:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{h-3}{2} & \frac{h+1}{2} \end{pmatrix}$$

Per $h \neq 3$ il sistema è compatibile ed ammette l'unica soluzione $\left(-\frac{h+3}{h-3}, \frac{h-1}{h-3}, \frac{h+1}{h-3}\right)$. In termini geometrici questo significa che per $h \neq 3$ il piano π_h e la retta r_1 sono incidenti e il loro punto di intersezione è $\left(-\frac{h+3}{h-3}, \frac{h-1}{h-3}, \frac{h+1}{h-3}\right)$.

Notiamo che per $h = 3$ il sistema è incompatibile in quanto l'ultima riga della matrice corrisponde all'equazione $0 = 2$. Geometricamente questo si traduce nel fatto che π_3 e r_1 sono paralleli disgiunti. In tal caso la distanza tra π_3 e r_1 è data da

$$d(\pi_3, r_1) = d(\pi_3, (2, 0, -1)) = \frac{|2 - 3 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) - 1|}{\sqrt{1 + 9 + 9}} = \frac{2}{\sqrt{19}}.$$

(c) Per $h = 3$ si determini una retta r_2 perpendicolare al piano π_3 e incidente la retta r_1. Siano P e Q i punti di intersezione di r_2 rispettivamente con r_1 e π_3. Si verifichi che la distanza tra P e Q coincide con la distanza tra r_1 e π_3 calcolata al punto (b).

Svolgimento

Consideriamo il piano

$$\pi_3 : X - 3Y + 3Z = 1.$$

Abbiamo visto nel punto (b) che il piano π_3 e la retta r_1 sono paralleli disgiunti. La retta r_2 cercata ha vettore di direzione parallelo al vettore normale di π_3 e passa per un qualsiasi punto di r_1.
Scegliamo:

- Punto: $P = A(2, 0, -1)$;
- Vettore direttore: $(1, -3, 3)$.

Quindi le equazioni parametriche di r_2 sono

$$r_2 : \begin{cases} x = t + 2 \\ y = -3t \\ z = 3t - 1 \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Calcoliamo il punto di intersezione di π_3 e r_2. Sostituendo le equazioni parametriche di r_2 nell'equazione cartesiana di π_3 otteniamo

$$t + 2 + 9t + 9t - 3 = 1 \Rightarrow t = \frac{2}{19}.$$

Quindi $\pi_3 \cap r_2 = \{Q\}$, dove $Q = \left(\frac{40}{19}, \frac{-6}{19}, \frac{-13}{19}\right)$.
Calcoliamo

$$\|\overrightarrow{PQ}\| = \left\| \left(\frac{2}{19}, \frac{-6}{19}, \frac{6}{19} \right) \right\| = \sqrt{\frac{4}{19^2} + \frac{36}{19^2} + \frac{36}{19^2}} = \sqrt{\frac{76}{19^2}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 19}{19^2}} = \frac{2}{\sqrt{19}},$$

verificando quanto trovato nel punto (b).

ESERCIZIO 3 [12 punti]. **Una famiglia di endomorfismi di $\mathbb{R}^3$.**

(a) Siano V e W due spazi vettoriali su un campo K e sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Si dimostri che se $\ker(f) = \{0_V\}$ allora f è iniettiva.

Svolgimento

Supponiamo che $\ker(f) = \{0_V\}$.
Ricordiamo che la funzione $f : V \to W$ è iniettiva se per ogni $v_1, v_2 \in V$

$$f(v_1) = f(v_2) \Rightarrow v_1 = v_2.$$

Siano dunque v_1, v_2 tali che $f(v_1) = f(v_2)$. Allora abbiamo

$$f(v_1) - f(v_2) = 0_W \Rightarrow f(v_1 - v_2) = 0_W \Rightarrow v_1 - v_2 \in \ker(f) = \{0_V\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow v_1 - v_2 = 0_V \Rightarrow v_1 = v_2.$$

Quindi f è iniettiva.

(b) Per $k \in \mathbb{R}$, si consideri l'endomorfismo

$$\begin{array}{rccc} f_k : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) & \mapsto & (kx + y + 3z, x + ky + 3z, -x - y). \end{array}$$

(b1) Si determinino i valori di k per cui f_k <u>non</u> è iniettiva e per tali valori si determini una base di $\ker(f_k)$.

Svolgimento

Poiché f_k è un endormorfismo, f_k <u>non</u> è iniettiva se e solo se f_k <u>non</u> è suriettiva.
Consideriamo quindi la matrice A_k associata a f_k rispetto alla base canonica:

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & 3 \\ 1 & k & 3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e determiniamo i valori di k per cui il rango di A_k non è massimo. Abbiamo

$$\det(A_k) = 6k - 6.$$

Quindi A_k non ha rango massimo se e solo se $k = 1$. Quindi $k = 1$ è l'unico valore per cui f_k non è iniettiva.

(b2) Si determinino i valori di k per cui $f(1,1,1) \in Span\{(1,1,1),(-1,0,1)\}$.

Svolgimento

Abbiamo

$$f(1,1,1) \in Span\{(1,1,1),(-1,0,1)\} \Leftrightarrow (k+4,k+4,-2) \in Span\{(1,1,1),(-1,0,1).$$

Poiché i vettori $(1,1,1)$ e $(-1,0,1)$ sono linearmente indipendenti, questo è equivalente a determinare i valori di k per cui $(k+4,k+4,-2),(1,1,1)$ e $(-1,0,1)$ sono linearmente dipendenti. A tale scopo basta determinare i valori per cui la matrice

$$M = \begin{pmatrix} k+4 & k+4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ha determinante nullo. Si calcola che $\det(M) = -k-6 = 0 \Leftrightarrow k = -6$. Quindi $f(1,1,1) \in Span\{(1,1,1),(-1,0,1)\}$ se e solo se $k=-6$.

(b3) Per $k = 4$, si determini se l'operatore f_4 è diagonalizzabile e in caso affermativo si trovi una base diagonalizzante.

Svolgimento

Per $k = 4$ abbiamo

$$\begin{array}{rccc} f_4 : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) & \mapsto & (4x + y + 3z, x + 4y + 3z, -x - y). \end{array}$$

Sia $\mathcal{B}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$. La matrice associata a f_4 rispetto a $\mathcal{B}$ è

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per determinare se f_4 è diagonalizzabile, cominciamo con il determinare gli autovalori di f_4, trovando le radici del polinomio caratteristico:

$$\begin{vmatrix} 4 - T & 1 & 3 \\ 1 & 4 - T & 3 \\ -1 & -1 & -T \end{vmatrix} = -T^3 + 8T^2 - 21T + 18 = -(T - 3)^2(T - 2).$$

Pertanto gli autovalori di f_4 sono 3 e 2 con molteplicità algebrica rispettivamente 2 e 1. Per ognuno di essi determiniamo l'autospazio corrispondente:

- $V_3(f_4) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = Span\{(-1, 1, 0), (-3, 0, 1)\}.$

- $V_2(f_4) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = Span\{(1, 1, -1)\}.$

Poiché $\dim(V_3(f_4)) = 2$, la moltiplicità algebrica e geometrica di 3 coincidono. Ne segue che l'operatore f_4 è diagonalizzabile e l'unione delle basi dei due autospazi $V_3(f_4)$ e $V_2(f_4)$

$$\mathcal{B}' = \{(-1, 1, 0), (-3, 0, 1), (1, 1, -1)\}$$

è una base di $\mathbb{R}^3$ diagonalizzante per f_4.

(b4) Sia A la matrice associata all'operatore f_4 rispetto alla base canonica $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ e sia D la matrice diagonale associata a f_4 rispetto alla base diagonalizzante $\mathcal{B}'$ trovata al punto (b3). Si determini una matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tale che $D = P^{-1}AP$ e se ne determini la sua inversa P^{-1}.

Svolgimento

Sia $\mathcal{B}' = \{(-1,1,0),(-3,0,1),(1,1,-1)\}$. Poiché $(-1,1,0),(-3,0,1),(1,1,-1)$ sono autovettori di f_4 rispettivamente agli autovalori 3, 3 e 2, la matrice D è

$$D = M_{\mathcal{B}'}(f_4) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Allora la matrice P cercata è la matrice del cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}'$ alla base $\mathcal{B}$, ossia

$$P = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(id_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si può calcolare l'inversa di P con uno dei metodi visti in classe (sistema lineare, algoritmo di Gauss–Jordan o la matrice cofattore) e si ottiene

$$P^{-1} = M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(id_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO 4 [6 punti]. **Un po' di teoria...**

(a) Si definisca il rango di un insieme finito di vettori di uno spazio vettoriale. Si definisca quindi il rango di una matrice.

Definizione

Il rango di un sottoinsieme finito $\{v_1, \dots, v_n\}$ di V è la dimensione del sottospazio generato da $\{v_1, \dots, v_n\}$. Il rango di una matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ è definito come il rango dell'insieme dei vettori riga (o, equivalentemente dei vettori colonna) di A.

(b) Si enunci e si dimostri il teorema di Rouché–Capelli.

Teorema

Un sistema lineare di m equazioni in n incognite $AX = b$, dove $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$, $b \in M_{m,1}(K)$ e $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$, è compatibile se e solo se $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b)$. In tal caso il sistema possiede ∞^{n-r} soluzioni, dove $r = \mathrm{rg}(A)$.

Dimostrazione

Siano $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in M_{m,1}(K)$ e $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$. Allora il sistema lineare $AX = b$ è compatibile se e solo se esiste $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \dim \left(Span \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} \right\} \right) = \dim \left(Span \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right\} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b).$$

Inoltre se $r = \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b)$, la matrice a scalini ottenuta riducendo $(A|b)$ possiede r pivots, nessuno dei quali appartiene all'ultima colonna. Questo implica che tra le colonne dei coefficienti delle variabili, $n - r$ non contengono pivots. Ne segue che le soluzioni possono essere espresse in funzione di $n - r$ variabili libere e che quindi il sistema possiede ∞^{n-r} soluzioni.

(c) Si dimostri o si confuti l'asserto seguente:

Sia $A \in \mathcal{M}_{2022,2023}(\mathbb{R})$ *e sia* $X = (X_1, X_2, \ldots, X_{2023})$. *Allora esiste* $b \in \mathcal{M}_{2022,1}(\mathbb{R})$ *tale che il sistema* $AX = b$ *ammette un'unica soluzione.*

Giustificazione

L'asserto è falso. Infatti, sia $b \in \mathcal{M}_{2022,1}(\mathbb{R})$. Ci sono due casi possibili:

- Se $\mathrm{rg}(A) \neq \mathrm{rg}(A|b)$, allora il sistema non è compatibile.
- Se $r = \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b)$, allora il sistema è compatibile e possiede ∞^{2023-r} soluzioni. Ma data la taglia della matrice A, deve essere $r \leq 2022$ e quindi $2023 - r \geq 1$. Quindi in tal caso il sistema possiede infinite soluzioni.

Concludiamo che il sistema o è incompatibile o possiede infinite soluzioni. In particolare non esiste $b \in \mathcal{M}_{2022,1}(\mathbb{R})$ tale che il sistema $AX = b$ ammette un'unica soluzione.