LEZIONE 4 - GEOMETRIA e ALGEBRA
15/03/23

ESEMPI DI SPAZI VETTORIALI

① VETTORI GEOMETRICI DEL PIANO E DELLO SPAZIO

Abbiamo studiato in dettaglio lo spazio vettoriale dei vettori geometrici del piano. In modo analogo si definiscono l'insieme dei vettori geometrici dello spazio e le corrispondenti operazioni di $+$ e $\cdot$ su di esso.

$$V = \left\{ \begin{array}{l} \text{vettori geometrici} \\ \text{dello spazio} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{segmenti orientati} \\ \vec{OP},\ P \text{ punto dello spazio} \end{array} \right\} \xleftrightarrow[\text{biezione}]{} \mathbb{R}^3$$

② L' n-SPAZIO NUMERICO SU $\mathbb{R}$ (SU K)

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ volte}} = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R},\ \forall i = 1, \dots, n\}$$

Definiamo $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

Noi abbiamo già verificato che per $\underline{n=2}$ si ottiene uno spazio vettoriale.

Analogamente è possibile verificare che $\forall\, n \geq 1$ $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ possiede la struttura di spazio vettoriale (cioè $+$ e $\cdot$ soddisfano le 8 proprietà della definizione).

$(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ è chiamato **n-spazio vettoriale numerico su $\mathbb{R}$**

<u>elemento neutro</u>: $\underline{0} = (0, \dots, 0)$ (vettore nullo)

<u>l'opposto</u> di $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ è $-\underline{x} = (-x_1, \dots, -x_n)$

<u>Osservazione</u>: Anche $\mathbb{R}$ $(n=1)$ è un esempio di $\mathbb{R}$-spazio vettoriale. In tal caso la moltiplicazione per scalari non è altro che la moltiplicazione di numeri reali.

(Più in generale ogni campo K ha una struttura di spazio vettoriale su se stesso

Possiamo sostituire $\mathbb{R}$ con un qualsiasi campo K e definire in maniera analoga le operazioni $+$ e $\cdot$ su K^n.

$$K^n = K \times \dots \times K = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in K, \ \forall i\}$$

$\forall \ (x_1, \dots, x_n), \ (y_1, \dots, y_n) \in K^n, \ \forall \lambda \in K$

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$
$$\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

$(K^n, +, \cdot)$ ha una struttura di spazio vettoriale su K.

$(K^n, +, \cdot)$ è chiamato <u>n-spazio vettoriale numerico</u> su K.

③ FUNZIONI DA UN INSIEME A UN CAMPO

Sia X un <u>insieme</u> non vuoto <u>qualunque</u> e K un <u>campo</u>

$$V = \{\text{funzioni } f : X \to K\}$$

in questo esempio un vettore è una funzione

Definiamo su V le operazioni seguenti:

BINARIA INTERNA

$$+ : V \times V \to V \qquad \text{dove} \quad f+g : X \to K$$
$$(f, g) \mapsto f+g \qquad\qquad x \mapsto f(x) + g(x)$$

per definire una funzione dobbiamo definire l'immagine degli elementi di X

somma di K (motivo per cui scegliamo un campo come codominio)

BINARIA ESTERNA

$$\cdot : K \times V \to V \qquad \text{dove} \quad \lambda \cdot f : X \to K$$
$$(\lambda, f) \mapsto \lambda \cdot f \qquad\qquad x \mapsto \lambda \cdot f(x)$$

moltiplicazione di K

Si noti che, nel contesto di funzioni reali a variabile reale (cioè $X = K = \mathbb{R}$), siamo abituati a sommare funzioni e a moltiplicarle per scalari.

Ad esempio siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(x)$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(x)$, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$,

allora $\lambda_1 \cdot f + \lambda_2 \cdot g$ è la funzione $\lambda_1 \cdot f + \lambda_2 \cdot g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 3\sin(x) + 2\cos(x)$

Esercizio: Mostrare che $+$ e $\cdot$ soddisfano le 8 proprietà della definizione di spazio vettoriale e che quindi $(V,+,\cdot)$ è uno spazio vettoriale su K.

④ POLINOMI A COEFFICIENTI REALI IN UN'INDETERMINATA

Sia x un'indeterminata

Def: Un polinomio a coefficienti reali nell'indeterminata x è un'espressione formale del tipo

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + \underline{a_0}, \quad a_i \in \mathbb{R} \quad \forall\ 1 \leq i \leq n$$

termine noto

Se $a_n \neq 0$ diciamo che n è il grado di $P(x)$ e scriviamo $\deg(P) = n$

o $\deg(P(x))$

ovvero il grado è il massimo esponente della x il cui coefficiente corrispondente è non nullo

Notazione: $\mathbb{R}[x] = \{$polinomi a coefficienti reali nell'indeterminata x (di grado arbitrario)$\}$

esempio: $3x^4 + 2x^3 - x + 2 \in \mathbb{R}[x]$ è un polinomio di grado 4.

Definiamo su $\mathbb{R}[x]$ le operazioni (usuali) di somma e moltiplicazione per uno scalare.

$$+ : \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$$
$$(P(x), Q(x)) \longmapsto P(x) + Q(x)$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$$
$$(\lambda, P(x)) \longmapsto \lambda \cdot P(x)$$

$P(x) + Q(x)$ e $\lambda \cdot P(x)$ sono così definite:

Siano

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \quad , \quad a_i \in \mathbb{R}.$$
$$Q(x) = b_p x^p + \dots + b_1 x + b_0 \quad , \quad b_i \in \mathbb{R}.$$

Sia $m = \max\{n, p\}$. Allora possiamo scrivere

$$P(x) = a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0$$
$$Q(x) = b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0$$

dove $a_i = 0 \ \forall \ n < i \leq m$ e $b_i = 0 \ \forall \ p < i \leq m$.

(facciamo questo per far apparire la x in P e Q alla stessa potenza massima)

↳ Più concretamente stiamo facendo la cosa seguente

$$P(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$$
$$Q(x) = 3x + 4 = 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 3x + 4$$

Allora definiamo:

$$P(x) + Q(x) := (a_m + b_m) x^m + \dots + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0)$$
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \lambda \cdot P(x) := \lambda a_m x^m + \dots + \lambda a_1 x + \lambda a_0$$

<u>esempio</u> : $P(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$, $Q(x) = 3x + 4 \in \mathbb{R}[x]$

$$P(x) + Q(x) = (1+0)x^3 + (2+0)x^2 + (1+3)x + (-1+4) =$$
$$= x^3 + 2x^2 + 4x + 3.$$

Otteniamo che $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

In modo analogo per ogni campo K si definisce:

$$(K[x], +, \cdot)$$

dove $K[x] := \{$polinomi a coefficienti in K nell'indeterminata $x\}$

Chiamiamo $K[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi nell'indeterminata x a coefficienti in K.

Diversi problemi di matematica (e fisica) hanno un insieme di soluzioni che possiede la struttura di spazio vettoriale.

Questo significa in particolare che se v e w sono due soluzioni, allora anche $v+w$ e $\lambda \cdot v$, $\lambda \in \mathbb{R}$, sono soluzioni del problema.

Esempio 1: $x,y,z \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} x+2y-z=0 \\ y+7z=0 \end{cases}$

sistema lineare omogeneo

termini noti nulli

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+2y-z=0 \text{ e } y+7z=0\} = \{(15t, -7t, t) : t \in \mathbb{R}\} \longrightarrow$$

S ha una struttura di spazio vettoriale

insieme delle soluzioni (che impareremo a calcolare durante questo corso)

Esempio 2: Un piccolo spoiler per quando studierete in analisi le equazioni differenziali.

Determiniamo le funzioni $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(y = f(x))$ tali che

$$\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = 0$$

$\ddot{y} = f''(x)$ (derivata seconda)

$\dot{y} = f'(x)$

equazione differenziale lineare ordinaria omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti.

$$S = \{y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = 0\} = \{c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$$

imparerete in analisi a risolvere questo tipo di equaz.

$\downarrow$

S ha una struttura di spazio vettoriale