LEZIONE 7 - GEOMETRIA e ALGEBRA

28/03/23

SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI

Def: Siano $X_1, \dots, X_n$ indeterminate.
Un' EQUAZIONE LINEARE nelle indeterminate $X_1, \dots, X_n$ a coefficienti in K è un'equazione della forma

$$(*) \quad a_1 X_1 + \dots + a_n X_n = b, \quad a_1, \dots, a_n, b \in K.$$

Una SOLUZIONE di $(*)$ è un elemento $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ che sostituito in $(*)$ al posto della n-upla $(X_1, \dots, X_n)$ dà luogo a un'identità.

L'equazione $(*)$ si dice OMOGENEA (risp. NON OMOGENEA) se $b=0$ (risp. se $b \neq 0$).

Se consideriamo simultaneamente m equazioni lineari nelle indeterminate $X_1, \dots, X_n$, otteniamo quello che chiamiamo un SISTEMA DI M EQUAZIONI LINEARI nelle n indeterminate:

$$(**) \begin{cases} a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \dots + a_{1n} X_n = b_1 \\ a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \dots + a_{2n} X_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + \dots + a_{mn} X_n = b_m \end{cases}, \quad a_{ij}, b_i \in K, \quad \forall i, j.$$

Def: Il sistema $(**)$ si dice OMOGENEO (risp. NON OMOGENEO) se $b_i = 0 \ \forall \, i = 1, \dots, m$ (risp. se $\exists \, i \in \{1, \dots, m\}$ tale che $b_i \neq 0$).

<u>esempio</u>:

1) $\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 = 0 \\ 2X_1 - X_2 = 0 \end{cases}$ è omogeneo

2) $\begin{cases} X_1 = 1 \\ X_2 + X_3 = 0 \end{cases}$ <u>non</u> è omogeneo

$b_1 \neq 0$

Def:
- Una SOLUZIONE di $(**)$ è un elemento $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ che è soluzione simultanea di tutte le m equazioni lineari.
- Un sistema si dice COMPATIBILE se possiede <u>almeno una</u> soluzione; si dice INCOMPATIBILE se non possiede soluzioni.
- Due sistemi si dicono EQUIVALENTI se hanno lo stesso insieme di soluzioni.

Esempi (in questi esempi consideriamo $K=\mathbb{R}$)

1) Un sistema omogeneo in n indeterminate è sempre compatibile, in quanto il vettore nullo $(0,\dots,0)\in K^n$ è sempre soluzione

2) Il sistema:

$$\begin{cases} X_1+X_2=0 \\ X_1+X_2=1 \end{cases}$$

non è compatibile (o è incompatibile), in quanto le due equazioni lineari non possono essere simultaneamente verificate.

3) Il sistema:

$$\begin{cases} X_1+X_2=0 \\ X_1-X_2=1 \end{cases}$$

è compatibile e l'unica soluzione è $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)\in\mathbb{R}^2$.

Un modo per calcolarla è "addizionare" le due equazioni:

$$X_1+X_2\underbrace{+X_1-X_2}=0\underbrace{+1} \Rightarrow 2X_1=1 \Rightarrow X_1=\frac{1}{2}.$$

la seconda equazione
mi dice che queste due
quantità sono uguali,
quindi sto addizionando al
primo e al secondo membro
la stessa quantità

Sostituendo poi $X_1=\frac{1}{2}$ in una delle due equazioni si trova $X_2=-\frac{1}{2}$.

4) Il sistema:

$$(*)\begin{cases} X_1+X_2=2 \\ 3X_1+3X_2=6 \end{cases}$$

si noti che queste due equazioni sono proporzionali e sono quindi equivalenti, cioè posseggono lo stesso insieme di soluzioni.

è compatibile e, più precisamente possiede infinite soluzioni date dalle soluzioni dell'equazione lineare

$$X_1+X_2=2 \iff X_1=-X_2-2$$

Si noti che per ogni valore reale di X_2 esiste un unico valore reale di X_1 che verifica l'equazione, cioè l'insieme delle soluzioni S di $(*)$ è costituito dalle coppie ordinate $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ tali che:

$$\begin{cases} x_1=2-t \\ x_2=t \end{cases},\ t\in\mathbb{R}.$$

In altre parole $S=\{(2-t,t),\ t\in\mathbb{R}\}\subseteq\mathbb{R}^2$.

Notazione matriciale di un sistema

Consideriamo un sistema di m equazioni in n indeterminate

$$(**)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Possiamo riscrivere (**) in forma matriciale. A tale scopo definiamo:

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(K)$$: MATRICE DEI COEFFICIENTI

l'entrata a_{ij} è il coefficiente dell'indeterminata x_j nella m-esima equazione

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$: VETTORE (COLONNA) DELLE INDETERMINATE

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in M_{m,1}(K)$$: VETTORE DEI TERMINI NOTI

Con questa notazione riscriviamo (**) come:

$$AX = b$$

La matrice

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

è detta MATRICE ORLATA (o COMPLETA) DEL SISTEMA.

Con questa interpretazione matriciale vedremo che ogni "operazione" sulle equazioni di un sistema corrisponderà a un' "operazione" sulle righe della sua matrice orlata.

Consideriamo il sistema seguente:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_3 = -3 \end{cases}$$

$x_2=0,\ x_3=-1$

$x_3=-1$

Matrice orlata

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

La forma particolare di questo sistema permette di risolverlo molto facilmente.

Infatti dall'ultima equazione si ricava $x_3=-1$, che sostituito nella seconda permette di ottenere $x_2=0$.
Infine sostituendo $x_2=0$ e $x_3=-1$ nella prima equazione otteniamo $x_1=4$.

Poiché ad ogni passaggio ogni variabile risulta univocamente determinata, otteniamo che il sistema possiede l'unica soluzione $(4,0,-1) \in \mathbb{R}^3$.

Un sistema di questo tipo è detto "sistema a scalini". Per definirlo, definiamo prima il concetto di "matrice a scalini".

Def: Una MATRICE A SCALINI (o A GRADINI) è una matrice avente le seguenti proprietà:

1) ogni riga, dopo la prima, inizia con almeno uno 0 in più della riga soprastante.

2) se una riga è nulla allora ogni riga sottostante è nulla.

Il primo elemento diverso da zero su ogni riga (se presente) è detto PIVOT.

Def: Un SISTEMA LINEARE si dice A SCALINI (o A GRADINI) se la sua matrice orlata è una matrice a scalini.

Esempi

1) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

è una matrice a scalini con pivots 1, 2 e 3.

Corrisponde al sistema a scalini

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ \quad 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ \qquad 3x_3 = -3 \end{cases}$$

che, come abbiamo visto, ha l'unica soluzione $(4,0,-1)$.

2) $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

l'ultimo pivot appartiene all'ultima colonna

è una matrice a scalini con pivots $1, -3, 1$ che corrisponde al sistema (a scalini):

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \\ \qquad -3x_3 = 6 \\ \qquad\quad 0 = 1 \\ \qquad\quad 0 = 0 \end{cases}$$

$\longrightarrow$ si noti che questo sistema è incompatibile

3) $$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

non è a scalini, in quanto la terza riga comincia con lo stesso numero di zero della seconda

4) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

non è a scalini, in quanto in una matrice a scalini se una riga è nulla allora anche le righe sottostanti sono nulle (le righe nulle si trovano tutte in basso alla matrice).

Osserviamo che se uno dei pivots è un elemento dell'ultima colonna (quella dei termini noti del sistema) allora il sistema non è compatibile (vedi esempio 2).

Infatti in tal caso il sistema possiede una riga $0 = b_i$ (pivot), con $b_i \neq 0$.

Se invece l'ultimo pivot non appartiene all'ultima colonna della matrice orlata, allora il sistema è compatibile e possiamo determinare il suo insieme di soluzioni "risolvendolo dal basso".

Più precisamente, in un sistema a scalini compatibile chiamiamo VARIABILI LIBERE le variabili corrispondenti alle colonne che <u>non</u> contengono pivots:

esempio:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 6 \end{array}\right) \longleftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 \qquad -2x_4 = 4 \\ \qquad 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ \qquad\qquad -2x_4 = 6 \end{cases}$$

non c'è un pivot nella 2ª colonna

I pivot appaiono nella 1ª, 3ª e 4ª colonna, quindi l'unica variabile libera è x_2

Si può quindi mostrare che ogni altra variabile si può esprimere in funzione delle variabili libere e dei termini noti. Algoritmicamente, si procede risolvendo l'ultima equazione non nulla, e sostituendo via via nelle equazioni precedenti, "muovendosi" dal basso verso l'alto

L'insieme delle soluzioni si ottiene quindi assegnando valori arbitrari alle variabili libere.

Riprendiamo l'esempio:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \qquad -2x_4 = 4 \\ \qquad 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ \qquad\qquad -2x_4 = 6 \end{cases}$$

x_2 è una variabile libera

$$\begin{cases} x_1 \qquad -2x_4 = 4 - x_2 \\ \quad 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ \qquad -2x_4 = 6 \end{cases}$$

① $-2x_4 = 6 \longrightarrow x_4 = -3$

② $x_3 = \frac{-2x_4}{3} = 2$ $x_4 = -3$

③ $x_1 = 2x_4 + 4 - x_2 = -2 - x_2$ $x_4 = -3$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 - x_2 \\ x_3 = 2 \\ x_4 = -3 \end{cases}$$

x_1, x_3, x_4 si esprimono in funzione di x_2 e dei termini noti

Quindi l'insieme delle soluzioni è

$$S = \{(-2-x_2, x_2, 2, -3) : x_2 = t,\ t \in \mathbb{R}\} = \{(-2-t, t, 2, -3) : t \in \mathbb{R}\}$$

Per ogni valore di t in $\mathbb{R}$ otteniamo una soluzione distinta del sistema.

Ad esempio:

$t=0 \rightarrow (-2,0,2,-3) \in \mathbb{R}^4$ è una soluzione del sistema

$t=-1 \rightarrow (-1,-1,2,-3) \in \mathbb{R}^4$ è una soluzione del sistema

etc.

Abbiamo quindi il risultato seguente:

Proposizione: Un sistema a scalini in n indeterminate è compatibile se e solo se l'ultimo pivot non appartiene all'ultima colonna della matrice orlata.

In tal caso, se m è il numero di variabili libere allora diciamo che il sistema possiede

∞^m soluzioni

Se non ci sono variabili libere, cioè $m=0$, allora il sistema possiede un'unica soluzione.

Osservazione: Si noti che m è uguale al numero delle incognite meno il numero dei pivots.

Esempi

Si determini se il sistema seguente è compatibile e, in caso affermativo, si trovi l'insieme delle soluzioni.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = -1 \\ 2x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 = 5 \\ x_4 + x_5 = 2 \end{cases} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Scriviamo la corrispondente matrice orlata

colonne delle variabili senza pivots

Notiamo subito che il sistema è compatibile in quanto l'ultimo pivot (1) non appartiene all'ultima colonna della matrice orlata.

Inoltre la 3ª e 5ª colonna non contengono pivots, quindi il sistema ha due variabili libere x_3 e x_5. Determiniamo x_1, x_2 e x_4 in funzione di x_3, x_5 e dei termini noti.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = -1 \\ 2x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 = 5 \\ x_4 + x_5 = 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_4 = -1 - 2x_3 - x_5 \\ 2x_2 - x_4 = 5 - 3x_3 + x_5 \\ x_4 = 2 - x_5 \end{cases}$$

2

1

1 $$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_4 = -1 - 2x_3 - x_5 \\ 2x_2 = 5 - 3x_3 + x_5 + x_4 = 5 - 3x_3 + x_5 + 2 - x_5 = 7 - 3x_3 \\ x_4 = 2 - x_5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_4 = -1 - 2x_3 - x_5 \\ x_2 = \dfrac{7 - 3x_3}{2} \\ x_4 = 2 - x_5 \end{cases}$$

2 $$\begin{cases} 3x_1 = -1 - 2x_3 - x_5 - x_2 - x_4 = -1 - 2x_3 - x_5 - \dfrac{7-3x_3}{2} - (2 - x_5) = \dfrac{-13 - x_3}{2} \\ x_2 = \dfrac{7 - 3x_3}{2} \\ x_4 = 2 - x_5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-13 - x_3}{6} \\ x_2 = \dfrac{7 - 3x_3}{2} \\ x_4 = 2 - x_5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-13 - s}{6} \\ x_2 = \dfrac{7 - 3s}{2} \\ x_3 = s \\ x_4 = 2 - t \\ x_5 = t \end{cases}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

x_3 e x_5 libere di variare arbitrariamente

Quindi l'insieme delle soluzioni è:

$$S = \left\{ \left(\frac{-13 - s}{6}, \frac{7 - 3s}{2}, s, 2 - t, t \right) : s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

2 parametri liberi, quindi ∞^2 soluzioni