# LEZIONE 10 - GEOMETRIA e ALGEBRA

05/04/23

Nella lezione precedente abbiamo definito la nozione di sottospazio vettoriale.

Abbiamo visto che un sottoinsieme non vuoto $W \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale se

(1)

(2) $\forall\, w_1, w_2 \in W: \ w_1 + w_2 \in W$

(3) $\forall\, \lambda \in K, \forall\, w \in W: \ \lambda w \in W$

$\Longleftrightarrow \forall\, w_1, w_2 \in W, \forall\, \lambda, \mu \in K: \ \underbrace{\lambda w_1 + \mu w_2}_{} \in W$

possiamo sintetizzare le due condizioni in una sola.

"combinazione lineare" di $w_1$ e $w_2$

Infatti:

$\Rightarrow$) Se $w_1, w_2 \in W$ e $\lambda, \mu \in K$, allora $\lambda w_1 \overset{(3)}{\in} W$, $\mu w_2 \overset{(3)}{\in} W$ e quindi $\lambda w_1 + \mu w_2 \underset{(2)}{\in} W$

$\Leftarrow$) (2) si ottiene con $\lambda = \mu = 1$.
(3) si ottiene con $w_1 = w$ e $\mu = 0$.

## Esempio

$V = \mathbb{R}^3$

a) $U = \{(x, y, x) : x, y \in \mathbb{R}\}$

$U$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$. Infatti:

1) $(0,0,0) \in U \Rightarrow U \neq \emptyset$.

2) Siano $u_1, u_2 \in U$. Allora $\exists\, x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$ tali che $u_1 = (x_1, y_1, x_1)$, $u_2 = (x_2, y_2, x_2)$.

$\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ abbiamo:

$$\lambda u_1 + \mu u_2 = \lambda (x_1, y_1, x_1) + \mu (x_2, y_2, x_2) = (\underline{\lambda x_1 + \mu x_2}, \lambda y_1 + \mu y_2, \underline{\lambda x_1 + \mu x_2}).$$

Notiamo che la prima e la terza componente di $\lambda u_1 + \mu u_2$ sono uguali. Quindi $\lambda u_1 + \mu u_2 \in U$.

b) $W = \{(x, y, x^2) : x, y \in \mathbb{R}\}$

$W$ non è uno spazio vettoriale. Mostriamo, ad esempio, che esistono $w_1, w_2 \in W$ tali che $w_1 + w_2 \notin W$

$w_1 = (1, 0, 1) \in W$, $w_2 = (2, 0, 4) \in W$, ma $w_1 + w_2 = (1, 0, 5) \notin W$ perché $5 \neq 1^2$.

**Proposizione**: Sia $V$ uno spazio vettoriale su $K$ e siano $U, W$ due sottospazi vettoriali di $V$. Allora anche $U \cap W$ è un sottospazio di $V$.

**Dim**

Mostriamo che $U \cap W$ soddisfa le 2 proprietà della definizione di sottospazio vettoriale.

1) $U \cap W \neq \emptyset$, poiché $\underline{0} \in U$ e $\underline{0} \in W$

vettore nullo di $V$

2) Se $v_1, v_2 \in U \cap W$ allora $v_1, v_2 \in U$ e $v_1, v_2 \in W$. Ora $U$ e $W$ sono due sottospazi vettoriali, quindi $\forall\ \lambda, \mu \in K$ $\lambda v_1 + \mu v_2 \in U$ e $\lambda v_1 + \lambda v_2 \in W$, ossia $\lambda v_1 + \mu v_2 \in U \cap W$.

Dalla proposizione ovviamente segue che se $W_1, \dots, W_n$ sono sottospazi vettoriali di $V$, allora

$$\bigcap_{i=1\dots n} W_i := W_1 \cap \dots \cap W_n$$

è un sottospazio di $V$.

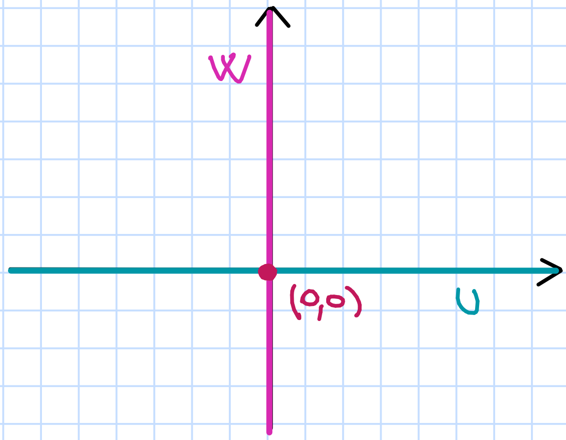
**Esempio**

Consideriamo in $\mathbb{R}^2$ le rette vettoriali

$U = \langle (1,0) \rangle = \{ (x,0) : x \in \mathbb{R} \}$

$W = \langle (0,1) \rangle = \{ (0,y) : y \in \mathbb{R} \}$

$U \cap W = \{(0,0)\}$ ← sottospazio banale di $\mathbb{R}^2$



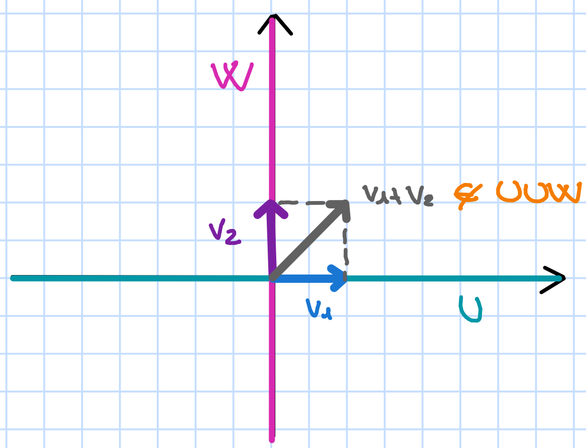

**Attenzione**: $U \cup W$ non è in generale un sottospazio di $V$.

Nell'esempio precedente:

Mostriamo che esistono due vettori $v_1, v_2 \in U \cup W$ tali che $v_1 + v_2 \notin U \cup W$:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= (1,0) \in U \subseteq U \cup W \\ v_2 &= (0,1) \in W \subseteq U \cup W \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_1 + v_2 = (1,1) \notin U \cup W \quad \left( \begin{aligned} (1,1) &\notin U \\ &\text{e} \\ (1,1) &\notin W \end{aligned} \right)$$

Geometricamente:




<u>Problema</u>: costruire uno spazio vettoriale di V che contiene U e W.

Come abbiamo notato nell'esempio precedente, lavorare con l'unione non garantisce la chiusura rispetto alla somma.

Per ovviare allora a questo problema definiamo il sottoinsieme di V costituito dalle somme di elementi di U e W:

$$U+W := \{u+w : u \in U, w \in W\}$$

Notiamo subito che $U \subseteq U+W$ e $W \subseteq U+W$. Infatti

$\forall\, u \in U$, $u = \overset{\in U}{u} + \overset{\in W}{\underline{0}}$ e $\forall\, w \in W$, $w = \overset{\in U}{\underline{0}} + \overset{\in W}{w}$.

Mostriamo che $U+W$ così definito è un sottospazio vettoriale di V.

<u>Def</u> / <u>Prop</u>: Sia V uno spazio vettoriale su K e siano U, W due sottospazi vettoriali di V.

Allora l'insieme

$$U+W = \{u+w : u \in U \text{ e } w \in W\}$$

è un sottospazio vettoriale di V chiamato SOTTOSPAZIO SOMMA dei sottospazi U e W.

<u>Dim</u>

Mostriamo che $U+W$ soddisfa le proprietà di sottospazio vettoriale:

1) $U+W \neq \emptyset$, poichè $\underline{0} = \underbrace{\underline{0}}_{\in U} + \underbrace{\underline{0}}_{\in W}$.

2) Siano $v_1, v_2 \in U+W$. Allora $\exists$ $u_1, u_2 \in U$ e $w_1, w_2 \in W$ tali che

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= u_1 + w_1 \\ v_2 &= u_2 + w_2 \end{aligned}\right\}$$

Allora, $\forall \lambda, \mu \in K$

$$\lambda v_1 + \mu v_2 = \lambda(\underbrace{u_1+w_1}_{v_1}) + \mu(\underbrace{u_2+w_2}_{v_2}) = \lambda u_1 + \lambda w_1 + \mu u_2 + \mu w_2 \underset{\text{commutatività}}{=} \underbrace{\lambda u_1 + \mu u_2}_{\in U} + \underbrace{\lambda w_1 + \mu w_2}_{\in W} \in U+W.$$

Riprendiamo di nuovo l'esempio su cui stavamo lavorando:

$V = \mathbb{R}^2$

$U = \langle (1,0) \rangle = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$

$W = \langle (0,1) \rangle = \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$

Allora:

$$U+W = \{(x,0)+(0,y) : x,y \in \mathbb{R}\} = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2.$$

**Def.**: Siano $U, W$ due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale $V$.

Se $U \cap W = \{\underline{0}\}$ allora $U+W$ è detto SOMMA DIRETTA di $U$ e $W$ e si denota con $U \oplus W$.

Se $V = U \oplus W$ allora i sottospazi $U$ e $W$ si dicono SUPPLEMENTARI.

Esempio: $V = \mathbb{R}^2$, $U = \langle(1,0)\rangle$, $W = \langle(0,1)\rangle$

$$U \cap W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \in U \text{ e } (x,y) \in W\} =$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \text{ e } y = 0\} = \{(0,0)\}$$

Quindi, poichè abbiamo già mostrato che $U+W = \mathbb{R}^2$, possiamo scrivere

$$\mathbb{R}^2 = U \oplus W.$$

Quando $V = U \oplus W$ è somma diretta di due sottospazi, allora ogni elemento di $V$ si scrive in modo unico come somma di un elemento di $U$ e un elemento di $W$.

Cosa significa che la scrittura è "unica"?

Stiamo dicendo che $\forall\, v \in V$, $\exists!\ (u, w) \in U \times W$ tale che

$$v = u + w,$$

o, in altre parole, che se $\exists\ v \in V$ tale che $v = u_1 + w_1 = u_2 + w_2$, $u_1, u_2 \in U$ e $w_1, w_2 \in W$, allora $u_1 = u_2$ e $w_1 = w_2$.

Più precisamente abbiamo la proposizione seguente:

Proposizione: Sia $V = U + W$. Allora $V = U \oplus W$ se e solo se ~~lo~~ ogni elemento di $V$ si scrive in modo unico nella forma $u + w$.

Dim

$\Rightarrow$) Supponiamo che per un vettore $v \in V$ esistono $u_1, u_2 \in U$ e $w_1, w_2 \in W$ $\big((u_1, w_1) \in U \times W,\ (u_2, w_2) \in U \times W\big)$ tali che:

$$v = u_1 + w_1 = u_2 + w_2 \implies \underbrace{u_1 - u_2}_{\in U} = \underbrace{w_2 - w_1}_{\in W}$$

Ma allora $u_1 - u_2,\ w_2 - w_1 \in U \cap W \overset{U \oplus W}{=} \{\underline{0}\} \implies u_1 - u_2 = \underline{0}$ e $w_2 - w_1 = \underline{0}$ $\implies u_1 = u_2$ e $w_1 = w_2$

$\Leftarrow$) Mostriamo che $U \cap W = \{0\}$, mostrando che se $v \in U \cap W$ allora $v = \underline{0}$.

Sia $v \in U \cap W$. Allora possiamo scrivere $\underline{0}$ come:

$$\underline{0} = \underset{\substack{\cap \\ U}}{\underline{0}} + \underset{\substack{\cap \\ W}}{\underline{0}} = \underset{\substack{\cap \\ U}}{v} + \underset{\substack{\cap \\ W}}{(-v)}.$$

$(v \in U \cap W)$

Per ipotesi ogni elemento di $V$ possiede una scrittura unica

Quindi $(\underline{0}, \underline{0}) = (v, -v)$, cioè $v = \underline{0}$.

Esempio 1

$V = \mathbb{R}^2$, $U = \langle (1,0) \rangle$, $W = \langle (0,1) \rangle$.

(Ri)dimostriamo che $\mathbb{R}^2 = U \oplus W$ mostrando che $\forall\ v \in \mathbb{R}^2\ \exists!\ (u, w) \in U \times W$ tale che $v = u + w$.

In enunciati del tipo "esiste ed è unico" dobbiamo procedere in 2 step:

$\exists$ ! $\to$ unicità
$\exists$ $\to$ esistenza

Sia $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

- <u>esistenza</u>: $(a,0) \in U$ e $(0,b) \in W$ sono tali che:

$$(a,b) = \underbrace{(a,0)}_{\in U} + \underbrace{(0,b)}_{\in W}$$

- <u>unicità</u>: Siano $(x_1,0), (x_2,0) \in U$, $(0,y_1), (0,y_2) \in W$ tali che:

$$(a,b) = \underbrace{(x_1,0) + (0,y_1)}_{\substack{\parallel \\ (x_1,y_1)}} = \underbrace{(x_2,0) + (0,y_2)}_{\substack{\parallel \\ (x_2,y_2)}}.$$

Allora $x_1 = x_2 = a$ e $y_1 = y_2 = b$.

<u>Esempio 2</u>

$V = \mathbb{R}^3$

$U = \{(x,y,x) : x,y \in \mathbb{R}\}$

$W = \{(x,x,z) : x,z \in \mathbb{R}\}$

si può facilmente mostrare che $U$ e $W$ sono sottospazi di $\mathbb{R}^3$

<u>Domanda</u>: $\mathbb{R}^3 = U + W$?

Sia $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Allora:

$$(a,b,c) = \underbrace{(a,b,a)}_{\in U} + \underbrace{(0,0,c-a)}_{\in W}.$$

Quindi $\mathbb{R}^3 = U + W$.

<u>Domanda</u>: $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$?

$$U \cap W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \in U \text{ e } (x,y,z) \in W\} =$$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = z \text{ e } x = y\} =$$

$$= \{(x,x,x) : x \in \mathbb{R}\} = \langle (1,1,1) \rangle \neq \{(0,0,0)\}$$

Quindi $\mathbb{R}^3$ <u>non</u> è somma diretta di $U \oplus W$. Avremmo anche potuto notare che non c'è unicità di scrittura: $(1,0,0) = \underbrace{(1,0,1)}_{\in U} + \underbrace{(0,0,-1)}_{\in W} = \underbrace{(0,-1,0)}_{\in U} + \underbrace{(1,1,0)}_{\in W}$.