LEZIONE 12 - GEOMETRIA e ALGEBRA

18/04/23

Nella lezione precedente abbiamo introdotto le seguenti definizioni:

Def: Sia V uno spazio vettoriale su K e siano $v_1, \dots, v_n \in V$.

- Diciamo che $v_1, \dots, v_n$ generano V se $\langle v_1, \dots, v_n \rangle = V$, cioè se $\forall\, v \in V$, $\exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ tali che

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n .$$

- Diciamo che $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti se

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \underline{0} \Rightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_n = 0.$$

Sulla definizione precedente si basa il concetto di "base" di uno spazio vettoriale.

Def: Sia V uno spazio vettoriale e siano $v_1, \dots, v_n \in V$. Diciamo che $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V se:

1) $v_1, \dots, v_n$ generano V.

2) $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti.

Proposizione: Sia V uno spazio vettoriale su K e $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V.
Allora $\forall\, v \in K$, $\exists!\, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$ tale che

$$(*) \quad v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n .$$

In altre parole, se $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n \in K$ sono tali che

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$$

allora $\lambda_i = \mu_i$, $\forall\, i = 1, \dots, n$.

I coefficienti $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ della combinazione lineare $(*)$ si dicono le COORDINATE di v rispetto alla base $\{v_1, \dots, v_n\}$ e $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ si dice la n-upla delle coordinate di v rispetto alla base $\{v_1, \dots, v_n\}$.

Dim

Poiché $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base, i vettori $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti.

La conclusione segue allora dall'esercizio 6-(d) del foglio 4.

Esempio 1

$V = \mathbb{R}^2$

$v_1 = (1,0)$, $v_2 = (0,1)$

Vediamo che:

- v_1, v_2 generano $\mathbb{R}^2$. Infatti $\forall\, (a,b) \in \mathbb{R}^2$:

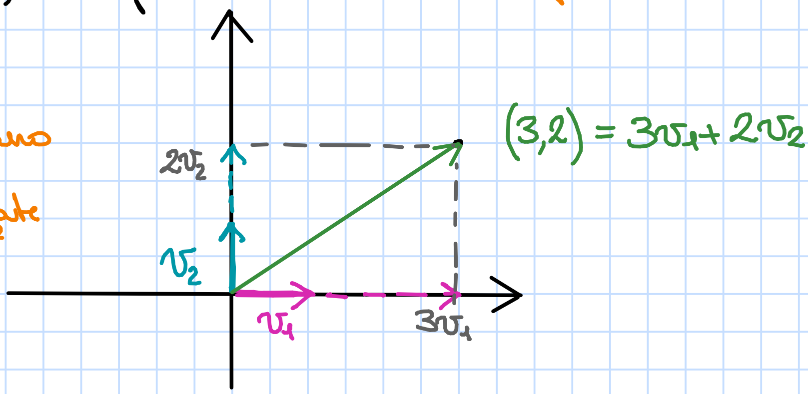
$$(a,b) = a\,(1,0) + b\,(0,1).$$

- v_1, v_2 sono linearmente indipendenti. Infatti se λ_1, λ_2 sono tali che:

$$\lambda_1 (1,0) + \lambda_2 (0,0) = (0,0) \Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2) = (0,0) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

Quindi $\mathcal{B} = \{(1,0), (0,1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$ e le coordinate di $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ rispetto a $\mathcal{B}$ non sono altro che l'ascissa e l'ordinata di (a,b) nel piano cartesiano (coordinate cartesiane).

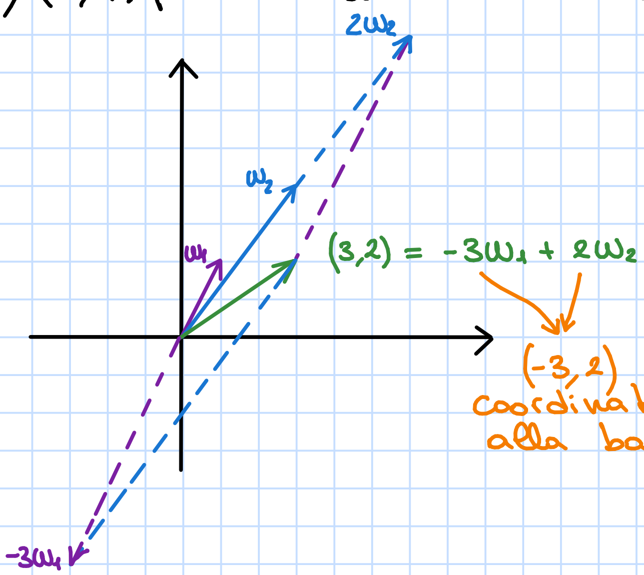
Le coordinate di un punto (a,b) nel piano cartesiano non sono altro che le coordinate del vettore $v = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ rispetto alla base $\{(1,0), (0,1)\}$.



Si noti che parliamo di <u>una</u> base di $\mathbb{R}^2$, in quanto essa non è unica.

Abbiamo infatti già visto che i vettori $w_1 = (1,2)$, $w_2 = (3,4)$ generano $\mathbb{R}^2$ e sono linearmente indipendenti.

Quindi $\mathcal{B}' = \{(1,2), (3,4)\}$ è un'altra base di $\mathbb{R}^2$.



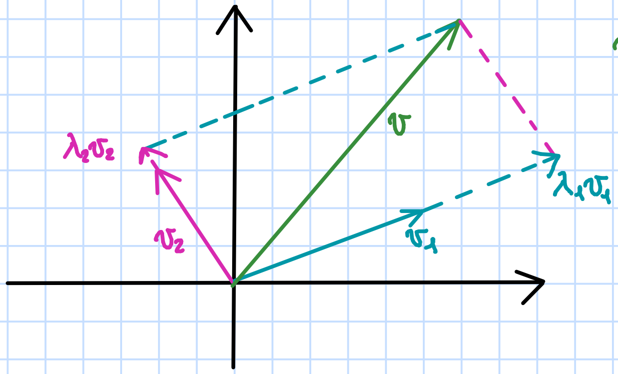
$(-3, 2)$ sono le coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2\}$

Def: Due vettori $v_1\, v_2 \in \mathbb{R}^2$ si dicono COLLINEARI se sono linearmente dipendenti, cioè se $\exists\ \lambda \in K$ tale che

$$v_1 = \lambda v_2 \quad \text{o} \quad v_2 = \lambda v_1 .$$

E' semplice vedere geometricamente che ogni coppia di vettori <u>non collineari</u> v_1, v_2 costituisce una base di $\mathbb{R}^2$.

$\forall\ v = (a,b) \in \mathbb{R}^2$, le coordinate di v rispetto a $\{v_1, v_2\}$ possono essere determinate "decomponendo" v sui vettori v_1 e v_2 (applicando, in un certo senso, la regola del parallelogramma al contrario).



$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$

(λ_1, λ_2) sono le coordinate di v rispetto alla base (v_1, v_2).

Ovviamente un solo vettore v non può mai costituire una base di $\mathbb{R}^2$ in quanto v genera tutti e soli i punti della retta vettoriale $\langle v \rangle$.

Vedremo che tutte le basi di $\mathbb{R}^2$ sono della forma $\{v_1, v_2\}$ con v_1, v_2 non collineari. In particolare tutte le basi di $\mathbb{R}^2$ sono costituite da 2 elementi.

Dimostriamo, più in generale, che se uno spazio vettoriale V ha una base finita (cioè con un numero finito di elementi) allora tutte le basi di V hanno lo stesso numero di elementi.

A tale scopo ci sarà utile il lemma seguente chiamato LEMMA DI STEINITZ che, per mancanza di tempo, enunceremo senza dimostrazione:

<u>Lemma</u> (di Steinitz)

Sia V uno spazio vettoriale con base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ e siano $w_1, \dots, w_p \in V$.

$$w_1, \dots, w_p \text{ sono linearmente indipendenti} \implies p \leq n.$$

$\Updownarrow$ (i due asserti sono equivalenti in quanto sono la contrapposta l'uno dell'altro)

$$p > n \implies w_1, \dots, w_p \text{ sono linearmente dipendenti.}$$

Esempio

Poichè una base di $\mathbb{R}^2$ è $\{(1,0),(0,1)\}$, allora per il lemma di Steinitz ogni insieme di vettori con più di 2 elementi è linearmente dipendente.

Attenzione: L'implicazione inversa del lemma di Steinitz <u>non</u> è vera, ovvero

$$p \leq n \not\Rightarrow w_1, \ldots, w_p \text{ linearmente indipendenti}$$

<u>ESEMPIO</u>: Il vettore nullo $\underline{0}$ è linearmente dipendente in qualsiasi spazio vettoriale.